Maß & Integraltheorie
Vorlesungsnotizen

Stilianos Louca

Juli 2008

Inhaltsverzeichnis

1 Messbare Räume

1.1 Algebren und σ-Algebren

Sei $M \neq \emptyset$ eine beliebige Menge und $\mathscr{P}(M)$ die Potenzmenge von M.
Notation: A^c sei das Komplement von A, d.h $A^c = M \setminus A$.

1.1.1 Definition: Mengenalgebra

Ein Mengensystem $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(M)$ heißt *Mengenalgebra* (kurz: Algebra) über M (bzw. von Teilmengen von M) falls gilt:

a) $M \in \mathscr{A}$

b) Ist $A \in \mathscr{A}$ so ist $A^c \in \mathscr{A}$

c) Sind $A, B \in \mathscr{A}$ so ist auch $A \cup B \in \mathscr{A}$

Bemerkung: Eine Algebra $\mathscr{A}$ ist stets abgeschlossen gegenüber Bildung beliebiger Mengentheoretischer Operationen über endlich vielen Mengen. Insbesondere folgt aus $A_1, .., A_n \in \mathscr{A}$ dass

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathscr{A}$$

ist, denn es ist $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c \in \mathscr{A}$ für $A, B \in \mathscr{A}$.
Ferner enthält jede Algebra auch die leere Menge $\emptyset = M^c$.

1.1.2 Definition: σ-Algebra

Ein Mengensystem $\mathcal{M} \subset \mathscr{P}(M)$ heißt *σ-Algebra* über M falls gilt:

a) $M \in \mathcal{M}$

b) Aus $A \in \mathcal{M}$ folgt $A^c \in \mathcal{M}$

c) Sind $A_n \in \mathscr{A},\ n \in \mathbb{N}$ so ist $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$

1.1.3 Aussage über σ-Algebren

Jede σ Algebra $\mathcal{M}$ ist auch eine Algebra.
Beweis: Seien $A, B \in \mathcal{M}$. Konstruieren die Folge

$$(A_n) \subset \mathcal{M}\ ,\ A_1 := A, A_2 := B, A_n := \emptyset \text{ für } n \geq 3$$

So folgt

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A \cup B \in \mathcal{M}$$

Bemerkung: Eine σ-Algebra $\mathcal{M}$ ist abgeschlossen bzgl. der Bildung beliebiger mengentheoretischer Operationen über abzählbaren vielen Mengen aus $\mathcal{M}$. Insbesondere folgt für $A_n \in \mathcal{M},\ n \in \mathbb{N}$:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_k = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c \right)^c \in \mathcal{M}$$

1.1.4 Aussage über Durchschnitte von Algebren

Sei I ein beliebiger Indexbereich. Dann gilt:

a) Ist $\mathscr{A}_i$ eine Algebra, $i \in I$, so ist auch
$$\bigcap_{i \in I} \mathscr{A}_i$$
eine Algebra.

b) Ist $\mathcal{M}_i$ eine σ-Algebra, $i \in I$, so ist auch
$$\bigcap_{i \in I} \mathcal{M}_i$$
eine σ-Algebra.

1.1.5 Aussage über kleinste Algebren

Sei $\mathcal{S} \in \mathscr{P}(M)$ ein beliebiges Mengensystem. Dann gilt:

a) Es existiert eine kleinste Algebra $\alpha(\mathcal{S})$ die $\mathcal{S}$ enthält, das heißt

- $\alpha(\mathcal{S})$ Algebra
- $\mathcal{S} \in \alpha(\mathcal{S})$
- Falls $\mathscr{A}$ eine Algebra mit $\mathcal{S} \subset \mathscr{A}$ ist, dann ist auch $\alpha(\mathcal{S}) \in \mathscr{A}$

Es gilt: $\alpha(\mathcal{S})$ ist eindeutig bestimmt. Letzteres ist klar, denn aus $\alpha_1(\mathcal{S}) \subset \alpha_2(\mathcal{S})$ und $\alpha_2(\mathcal{S}) \subset \alpha_1(\mathcal{S})$ folgt $\alpha_1(\mathcal{S}) = \alpha_2(\mathcal{S})$.

b) Es existiert eine kleinste σ-Algebra $\sigma(\mathcal{S})$ die $\mathcal{S}$ enthält, das heißt

- $\sigma(\mathcal{S})$ ist σ-Algebra
- $\mathcal{S} \subset \sigma(\mathcal{S})$
- Falls $\mathcal{M}$ eine σ-Algebra ist mit $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}$, so ist auch $\sigma(\mathcal{S}) \subset \mathcal{M}$

Auch hier ist $\sigma(\mathcal{S})$ eindeutig bestimmt.

Das System $\mathcal{S}$ heißt *Erzeuger* (oder *Erzeugendensystem*) für $\alpha(\mathcal{S})$ bzw. $\sigma(\mathcal{S})$.

Beweis der Existenz: Das System
$$\alpha(\mathcal{S}) := \bigcap_{\substack{\mathcal{S} \subset \mathscr{A} \\ \mathscr{A} \text{ Algebra}}} \mathscr{A}$$
ist eine Algebra, enthält $\mathcal{S}$ und ist die kleinste solche. Analog ist
$$\sigma(\mathcal{S}) := \bigcap_{\substack{\mathcal{S} \subset \mathcal{M} \\ \mathcal{M}\ \sigma-\text{Algebra}}} \mathcal{M}$$
die kleinste σ-Algebra die $\mathcal{S}$ enthält.

1.1.6 Definition: Messbarer Raum

Es sei $M \neq \emptyset$ eine beliebige Menge und $\mathcal{M} \subset \mathscr{P}(M)$ eine σ-Algebra. Dann heißt:

- $(M, \mathcal{M})$ *messbarer Raum*
- $A \in \mathcal{M}$ *messbare Menge*

Beispiele: Sei $M \neq \emptyset$.

a) $\mathcal{M} := \{\emptyset, M\}$ ist eine σ-Algebra.

b) $\mathcal{M} = \mathscr{P}(M)$ ist eine σ-Algebra.

1.1.7 Satz über messbare Räume

Sei $(M, \mathcal{M})$ ein messbarer Raum, $M_0 \subset M$ beliebig und

$$\mathcal{M}_0 := \mathcal{M} \cap M_0 := \{A \cap M_0 \mid A \in \mathcal{M}\}$$

Dann gilt: $(M_0, \mathcal{M}_0)$ ist ein messbarer Raum.

1.1.8 Definition: Messbarer Unterraum

Sei $M \neq \emptyset$, $\mathcal{M} \subset \mathscr{P}(M)$ eine σ-Algebra und $M_0 \subset M$ beliebig. Dann heißt $(M_0, \mathcal{M}_0)$ *messbarer Unterraum* von $(M, \mathcal{M})$ oder *Spur* von $(M, \mathcal{M})$ auf M_0. Ähnlich heißt $\mathcal{M}_0$ *Spur* von $\mathcal{M}$ auf M_0.

1.1.9 Hilfssatz über σ-Algebren auf Untermengen

Sei $M \neq \emptyset$ eine beliebige Menge, $\mathcal{S} \subset \mathscr{P}(M)$ und $M_0 \subset M$. Es bezeichne $\sigma_M(\mathcal{S})$ die von $\mathcal{S}$ in M erzeugte σ-Algebra, das heißt die kleinste σ-Algebra über Teilmengen von M die $\mathcal{S}$ enthält. Dann gilt:

$$\sigma_M(\mathcal{S}) \cap M_0 = \sigma_{M_0}(\mathcal{S} \cap M_0)$$

1.1.10 Definition: Halbalgebra

Das Mengensystem $\mathscr{C} \subset \mathscr{P}(M)$ heißt *Halbalgebra* von Teilmengen von M (über M), falls gilt:

a) $M \in \mathscr{C}$

b) Sind $A, B \in \mathscr{C}$ so ist auch $A \cap B \in \mathscr{C}$

c) Ist $A \in \mathscr{C}$ so existieren paarweise disjunkte (p.d.) Teilmengen $A_1, .., A_n \in \mathscr{C}$ mit

$$A^c = \bigcup_{k=1}^{n} A_n$$

Bemerkung: Jede Algebra $\mathscr{A}$ ist eine Halbalgebra.

1.2 Monotone Klassen

Sei $M \neq \emptyset$ eine beliebige Menge und $\mathcal{K} \subset \mathscr{P}(M)$.

1.2.1 Definition: Monotone Klasse

Ein Mengensystem $\mathcal{K}$ heißt *monotone Klasse*, falls gilt:

- Für $A_n \in \mathcal{K}$, $A_n \subset A_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ ist $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{K}$
- Für $A_n \in \mathcal{K}$, $A_{n+1} \subset A_n$, $n \in \mathbb{N}$ ist $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{K}$

Bemerkung: Jede σ-Algebra ist eine monotone Klasse.

1.2.2 Satz über monotone Klassen und σ-Algebren

Sei $\mathcal{M} \subset \mathscr{P}(M)$.
Dann gilt: $\mathcal{M}$ ist eine σ-Algebra $\Leftrightarrow$

a) $\mathcal{M}$ ist eine Algebra, und

b) $\mathcal{M}$ ist eine monotone Klasse

Beweis: Notwendigkeit: Jede σ-Algebra ist eine Algebra und eine monotone Klasse (klar!)
Hinreichende Bedingung: Zu zeigen ist: $\mathcal{M}$ ist eine σ-Algebra unter den Bedingungen (a) und (b). Also:

- $M \in \mathcal{M}$ da $\mathcal{M}$ eine Algebra ist.
- Ist $A \in \mathcal{M}$ so ist auch $A^c \in \mathcal{M}$ da $\mathcal{M}$ eine Algebra ist.
- Seien $A_n \in \mathcal{M},\ n \in \mathbb{N}$. Setzen:
$$B_n := \bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{M}$$
Es gilt: $B_n \subset B_{n+1}$. Folglich gilt
$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{M}$$
da $\mathcal{M}$ eine monotone Klasse ist. $\square$

1.2.3 Der monotone Klassensatz

Sei $M \neq \emptyset,\ \mathscr{A}, \mathcal{K} \subset \mathscr{P}(M)$ mit

- $\mathscr{A}$ Algebra
- $\mathcal{K}$ monotone Klasse
- $\mathscr{A} \subset \mathcal{K}$

Dann gilt: $\sigma(\mathscr{A}) \subset \mathcal{K}$.

1.3 Dynkin Systeme

1.3.1 Definition: Dynkin System

Sei $M \neq \emptyset$ und $\mathcal{D} \subset \mathscr{P}(M)$. Das System $\mathcal{D}$ heißt *Dynkin System*, falls gilt:

1) $M \in \mathcal{D}$

2) Für $A \in \mathcal{D}$ folgt auch $A^c \in \mathcal{D}$

3) Für $A_n \in \mathcal{D},\ n \in \mathbb{N}$ paarweise disjunkte Mengen, folgt
$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$$

Bemerkungen:

i) Ist $\mathcal{D}$ Dynkin System, so ist $\emptyset \in \mathcal{D}$

ii) Ist $\mathcal{D}$ Dynkin System, so folgt für paarweise disjunkte $A_1, .., A_n \in \mathcal{D}$ auch
$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{D}$$

iii) Ist $\mathcal{D}$ Dynkin System so folgt (2'): Für $A, B \in \mathcal{D},\ A \subset B$ folgt $B \setminus A \in \mathcal{D}$
Also: $\mathcal{D}$ ist Dynkin System $\Leftrightarrow$ Es gelten die Eigenschaften 1,2',3
Beweis:

$$B \setminus A = B \cap A^c = ((B \cap A^c)^c)^c = (B^c \cup A)^c$$

$$\text{Doch: } B, A \in \mathcal{D} \ \Rightarrow\ B^c \in \mathcal{D} \ \wedge\ B^c \cap A = \emptyset \ \Rightarrow\ B^c \cup A \in \mathcal{D} \ \Rightarrow\ (B^c \cup A)^c \in \mathcal{D} \ \Rightarrow\ B \setminus A \in \mathcal{D}$$

iv) Unterschied zur σ-Algebra: In einem Dynkin System gehören im allgemeinen nur Vereinigungen von paarweise disjunkte Folgen (A_n) zu $\mathcal{D}$.

1.3.2 Definition: π-System

Sei $M \neq \emptyset$ und $\mathcal{C} \subset \mathscr{P}(M)$. $\mathcal{C}$ heißt *π-System* falls gilt: Für $A, B \in \mathcal{C}$ folgt $A \cap B \in \mathcal{C}$.

1.3.3 Satz über π-Systeme und σ-Algebren

Sei $M \neq \emptyset$ und gegeben ein System $\mathcal{M} \subset \mathscr{P}(M)$. Dann gilt:
$\mathcal{M}$ ist eine σ-Algebra: $\Leftrightarrow$

a) $\mathcal{M}$ ist ein π-System

b) $\mathcal{M}$ ist ein Dynkin System

1.3.4 Definition: Kleinstes Dynkin System

Sei $M \neq \emptyset$ und $\mathcal{S} \subset \mathscr{P}(M)$. Dann heißt $\delta(\mathcal{S})$ *kleinstes Dynkin System*, mit $\mathcal{S} \subset \delta(\mathcal{S})$. Es ist

$$\delta(\mathcal{S}) = \bigcap_{\substack{\mathcal{S} \subset \mathcal{D} \\ \mathcal{D} \text{ Dynkin System}}} \mathcal{D}$$

Bemerkung: Es ist $\delta(\mathcal{S}) \subset \sigma(\mathcal{S})$.

1.3.5 Satz über Dynkin Systeme

Sei $M \neq \emptyset$. Gegeben seien $\mathcal{C}, \mathcal{D} \subset \mathscr{P}(M)$ mit folgenden Eigenschaften:

a) $\mathcal{C}$ sei π-System

b) $\mathcal{D}$ sei Dynkin System

c) $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$

Dann folgt: $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{D}$
Bemerkung: Es folgt sogar: $\sigma(\mathcal{C}) = \delta(\mathcal{C})$, denn $\delta(\mathcal{C})$ ist ein Dynkin System.

2 Maßräume

2.1 Maße

Sei $M \neq \emptyset$ eine beliebige Menge.

2.1.1 Definition: Mengenfunktion

Sei $\mathcal{S} \subset \mathscr{P}(M)$. Eine Abbildung $\mu : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ heißt *nicht negative Mengenfunktion* auf $\mathcal{S}$.

2.1.2 Definition: Maß

Sei $\mathcal{M} \subset \mathscr{P}(M)$ eine σ-Algebra über M. Eine nicht negative Mengenfunktion μ auf $\mathcal{M}$ heißt *Maß* auf $\mathcal{M}$ falls gilt:

- $\mu(\emptyset) = 0$
- σ-Additivität: Für paarweise disjunkte $A_n \in \mathcal{M},\ n \in \mathbb{N}$ folgt:

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Das Tripel $(M, \mathcal{M}, \mu)$ heißt *Maßraum*.
Bemerkung: Der Wert $\mu(A) = \infty$ ist zugelassen!

2.1.3 Definition: Inhalt

Sei $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(M)$ eine Algebra über M. Eine nicht negative Mengenfunktion μ auf $\mathscr{A}$ heißt *Inhalt* auf $\mathscr{A}$, falls gilt:

- $\mu(\emptyset) = 0$
- Additivität: Für disjunkte $A, B \in \mathscr{A}$ gilt:

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$$

2.1.4 Definition: Prämaß

Sei $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(M)$ eine Algebra über M. Eine nicht negative Mengenfunktion μ auf $\mathscr{A}$ heißt *Prämaß* auf $(M, \mathscr{A})$ falls gilt:

- $\mu(\emptyset) = 0$
- Für paarweise disjunkte $A_n \in \mathscr{A},\ n \in \mathbb{N}$ mit $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A}$ folgt:

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Bemerkungen:

a) Jede σ-Algebra $\mathcal{M}$ ist eine Algebra.

b) Jedes Maß μ ist auch ein Prämaß.

c) Jedes Prämaß auf $(M, \mathscr{A})$ ist auch ein Inhalt.

2.1.5 Definition: Endliches Maß

Ein Maß μ auf $(M, \mathcal{M})$ (bzw. Prämaß, Inhalt auf $(M, \mathcal{M})$) heißt *endlich*, falls $\mu(M) < \infty$ gilt. Ein Maßraum $(M, \mathcal{M}, \mu)$ heißt endlich, falls μ endlich ist.

2.1.6 Eigenschaften von Maßen

Sei $(M, \mathcal{M})$ ein messbarer Raum und μ ein Maß auf $(M, \mathcal{M})$. Dann gilt:

- **Additivität:** Für disjunkte $A, B \in \mathcal{M}$ folgt:
$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$$
Beweis: Setzen $A_1 := A,\ A_2 := B,\ A_n := \emptyset,\ n \geq 3$.

- **Monotonie:** Für $A, B \in \mathcal{M},\ A \subset B$ gilt: $\mu(A) \subset \mu(B)$.
Beweis:
$$\mu(B) = \mu\left(A \cup (B \setminus A)\right) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)$$

- **Endlichkeit:** Sei μ endliches Maß. Dann gilt: $\mu(A) < \infty$ für alle $A \in \mathcal{M}$.
Beweis: Folgt direkt aus der Monotonie.

- **Subtraktivität:** Für $A, B \in \mathcal{M},\ A \subset B$ und $\mu(A) < \infty$ folgt:
$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$$
Beweis: $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$

- **Maß des Komplements:** Für $A \in \mathcal{M}$ mit $\mu(A) < \infty$ ist
$$\mu(A^c) = \mu(M) - \mu(A)$$
Beweis: Spezialfall der Subtraktivität.

- **Starke Additivität:** Für $A, B \in \mathcal{M}$ gilt:
$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$$
Beweis: Zum einen ist
$$\mu(A \cup B) = \mu\left((A \cap B) \cup (A \setminus B) \cup (B \setminus A)\right) = \mu(A \cap B) + \mu(A \setminus B) + \mu(B \setminus A)$$
und zum anderen:
$$\mu(A) = \mu(A \cap B) + \mu(A \setminus B)\ ,\ \mu(B) = \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A)$$
In einander eingesetzt beweist die Behauptung.

- **Subatitivität:** Für $A_n \in \mathcal{M},\ n \in \mathbb{N}$ gilt die Ungleichung:
$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$
Beweis: Setzen $A_1' := A_1,\ A_{n+1}' := A_{n+1} \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$. Dann sind $A_j' \in \mathcal{M}$ paarweise disjunkt und $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n'$.
Demnach:
$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n'\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n') \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

- **Stetigkeit von unten:** Für $A_n \in \mathcal{M},\ A_n \subset A_{n+1},\ n \in \mathbb{N}$ ist:
$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$$

- **Stetigkeit von oben:** Für $A_n \in \mathcal{M},\ A_{n+1} \subset A_n,\ n \in \mathbb{N}$ mit: $\exists\ n_0 \in \mathbb{N} : \mu(A_{n_0}) < \infty$ gilt:
$$\mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$$

- **Stetigkeit der leeren Menge:** Für $A_n \in \mathcal{M},\ A_{n+1} \subset A_n,\ n \in \mathbb{N}$ und $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$ sowie $\exists\ n_0 \in \mathbb{N} : \mu(A_{n_0}) < \infty$ folgt:
$$\lim_{n \to \infty} \mu(A_n) = 0$$
Beweis: Direkte Folgerung aus Stetigkeit von oben.

2.1.7 Beispiele von Maßen

Sei $(M, \mathcal{M})$ ein beliebiger messbarer Raum.

- **Dirac Maß:** Gegeben sei $\chi \in M$. Dann ist

$$\delta_\chi(A) := \begin{cases} 1 & : \chi \in A \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

  ein Maß auf $(M, \mathcal{M})$ und heißt *Dirac Maß* in $\chi \in M$ (δ-Maß oder *Einheitsmaß* in χ).

- Sind $\mu_n,\ n \in \mathbb{N}$ Maße auf $(M, \mathcal{M})$, so ist auch μ definiert durch

$$\mu(A) := \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(A)\ ,\ A \in \mathcal{M}$$

  ein Maß auf $(M, \mathcal{M})$. Notation: $\mu = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu_n$

- **Multiplikation mit Skalaren:** Ist μ ein Maß auf $(M, \mathcal{M})$ so ist auch für $\alpha \in [0, \infty]$ die Abbildung

$$(\alpha\mu)(A) := \alpha \cdot \mu(A)\ ,\ A \in \mathcal{M}$$

  ein Maß auf $(M, \mathcal{M})$.
  Bemerke: Nach Vereinbarung ist $0 \cdot \infty = 0$.

- **Nullmaß:** Die Abbildung $\mu(A) = 0,\ A \in \mathcal{M}$ ist insbesondere ein Maß.

- Sind $\mu_n,\ n \in \mathbb{N}$ Maße auf $(M, \mathcal{M})$ und $\alpha_n \in [0, \infty]$, so ist auch

$$\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot \mu_n$$

  ein Maß auf $(M, \mathcal{M})$.

- **Diskretes Maß:** Insbesondere ist

$$\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \delta_{\chi_n}$$

  für $\alpha_n \in [0, \infty],\ \chi_n \in M$ ein Maß auf $(M, \mathcal{M})$.
  Bemerke: Für $A \cap \{\chi_1, \chi_2, ..\} = \emptyset$ ist $\mu(A) = 0$. Man sagt: μ ist konzentriert auf $\{\chi_1, \chi_2, ...\}$.

- **Monotoner Grenzwert:** Sind $\mu_n,\ n \in \mathbb{N}$ Maße auf $(M, \mathcal{M})$ und $\mu_n \leq \mu_{n+1}$, das heißt $\mu_n(A) \leq \mu_{n+1}(A)\ \forall\ A \in \mathcal{M}$, so ist auch

$$\mu(A) := \lim_{n \to \infty} \mu_n(A)\ ,\ A \in \mathcal{M}$$

  ein Maß auf $(M, \mathcal{M})$.

- **Zählmaß:** Für $M = \mathbb{N}$ und $\mathcal{M} = \mathscr{P}(\mathbb{N})$ heißt

$$\mu := \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n$$

  Zählmaß. Es ist also $\mu(A) = |A|$ für $A \subset \mathbb{N}$.

- Jedes Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathcal{P}$ auf $(M, \mathcal{M})$ ist ein Maß mit $\mathcal{P}(M) = 1$.

2.2 Der Eindeutigkeitssatz für Maße

Gegeben sei der messbare Raum $(M, \mathcal{M})$. Betrachten Maße μ_1, μ_2 auf $(M, \mathcal{M})$.
Häufige Fragestellung: Gilt $\mu_1 = \mu_2$?
Problem: Wie überprüft man $\mu_1(A) = \mu_2(A)\ \forall\ A \in \mathcal{M}$?
Wunsch: Aussage der Gestalt: Falls $\mu_1(A) = \mu_2(A)$ erfüllt ist für A einfacher Struktur, so folgt bereits die Gleichheit der Maße auf $\mathcal{M}$.
Also gegeben: Mengensystem $\mathscr{S} \subset \mathcal{M}$
Gesucht: Bedingungen an die Struktur von $\mathscr{S}$, so dass gilt: $\mu_1(A) = \mu_2(A)$ auf $\mathscr{S}\ \Rightarrow\ \mu_1 = \mu_2$ auf $\mathcal{M}$.

2.2.1 Eindeutigkeitssatz für endliche Maße

Sei $(M, \mathcal{M})$ ein beliebiger messbarer Raum und μ_1, μ_2 endliche Maße auf $(M, \mathcal{M})$. Weiterhin sei $\mathscr{S} \subset \mathcal{M}$ und folgende Eigenschaften seien erfüllt:

- $\sigma(\mathscr{S}) = \mathcal{M}$
- $M \in \mathscr{S}$
- $\mathscr{S}$ ist ein π-System.
- $\mu_1(A) = \mu_2(A)$ auf $\mathscr{S}$

Dann folgt: $\mu_1 = \mu_2$ auf $\mathcal{M}$, das heißt $\mu_1(A) = \mu_2(A)\ \forall\ A \in \mathcal{M}$.

2.2.2 Eindeutigkeitssatz für Maße

Seien μ_1, μ_2 Maße auf dem messbaren Raum $(M, \mathcal{M})$ und $\mathscr{S} \subset \mathcal{M}$ mit den Eigenschaften:

- $\sigma(\mathscr{S}) = \mathcal{M}$
- $\exists\ M_n \in \mathscr{S}$ mit $M_n \subset M_{n+1}$ und $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} M_n = M$ und $\mu_i(M_n) < \infty$ für $n \in \mathbb{N},\ i = 1, 2$
- $\mathscr{S}$ ist ein π-System.
- $\mu_1(A) = \mu_2(A)$ für $A \in \mathscr{S}$

Dann gilt: $\mu_1 = \mu_2$ auf $\mathcal{M}$.

2.3 σ-endliche Maße

2.3.1 Definition: σ-Endlichkeit

Sei $(M, \mathcal{M})$ ein messbarer Raum, $\mathscr{S} \subset \mathcal{M}$ und μ ein Maß auf $(M, \mathcal{M})$. Das Maß μ heißt *σ-endlich auf $\mathscr{S}$*, falls es Mengen $M_n \in \mathscr{S},\ n \in \mathbb{N}$ gibt mit:

- $M_n \subset M_{n+1}$
- $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} M_n = M$
- $\mu(M_n) < \infty$ für $n \in \mathbb{N}$

Das Maß μ heißt *σ-endlich*, falls es σ-endlich auf $\mathcal{M}$ ist. Dann heißt der Maßraum $(M, \mathcal{M})$ *endlich.*
Bemerkung: Die Forderung der Monotonie $M_n \subset M_{n+1}$ ist eigentlich nicht notwendig, da man aus den anderen beiden Bedingungen immer eine Folge M'_n konstruieren kann die auch diese erfüllt.

3 Konstruktion von Maßen

3.1 Der Fortsetzungssatz von Caratheodory

Sei $(M, \mathcal{M})$ ein beliebiger messbarer Raum, $\mathscr{A} \subset \mathcal{M}$ eine Algebra und $\sigma(\mathscr{A}) = \mathcal{M}$.

Beispiel:

$$M = \mathbb{R},\ \mathscr{S} = \{[a,b] \cap \mathbb{R},\ -\infty \leq a < b \leq \infty\}\ ,\ \mathscr{A} = \alpha(\mathscr{S})$$

$$\mathscr{B}(\mathbb{R}) := \sigma(\mathscr{S}) = \sigma(\mathscr{A}) : \sigma\text{-Algebra der Borelmengen aus } \mathbb{R}$$

3.1.1 Fortsetzungssatz (C.Caratheodory)

Es sei μ ein Prämaß auf $(M, \mathscr{A})$. Dann folgt:

a) Es existiert stets ein Maß $\tilde{\mu}$ auf $(M, \mathcal{M})$ mit:

$$\tilde{\mu}(A) = \mu(A)\ \ \forall\ A \in \mathscr{A}$$

das heißt $\tilde{\mu}$ ist eine Fortsetzung von μ auf $\mathcal{M}$.

b) Ist das Prämaß μ σ-endlich auf $\mathscr{A}$, so ist $\tilde{\mu}$ eindeutig bestimmt, das heißt: Falls $\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2$ auf $(M, \mathcal{M})$ mit

$$\tilde{\mu}_1(A) = \mu(A) = \tilde{\mu}_2(A)\ \ \forall\ A \in \mathscr{A}$$

sind, so folgt: $\tilde{\mu}_1(A) = \tilde{\mu}_2(A)$ auf $\mathcal{M}$.
Bemerke: Das Maß $\tilde{\mu}$ ist ebenfalls σ-endlich.

3.2 Das äußere Maß

3.2.1 Definition: $\mathscr{A}_\sigma$

Sei $\mathscr{A}$ eine Algebra auf M. Dann ist:

$$\mathscr{A}_\sigma := \left\{ A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \mid A_n \in \mathscr{A},\ A_n \subset A_{n+1},\ n \geq 1 \right\}$$

3.2.2 Satz über $\mathscr{A}_\sigma$

Für eine Algebra $\mathscr{A}$ gilt:

i) $\mathscr{A} \subset \mathscr{A}_\sigma$, insbesondere $\emptyset, M \in \mathscr{A}_\sigma$

ii) Für $A, B \in \mathscr{A}_\sigma$ ist auch $A \cap B, A \cup B \in \mathscr{A}_\sigma$

iii) Für $A_n \in \mathscr{A}_\sigma,\ A_n \subset A_{n+1},\ n \geq 1$ ist auch $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A}_\sigma$

Bemerke:

- $\mathscr{A}_\sigma$ ist im allgemeinen keine Algebra und insbesondere keine σ-Algebra.
- $\mathscr{A}_\sigma$ ist im allgemeinen keine monotone Klasse.
- $A \in \mathscr{A}_\sigma \not\Rightarrow A^c \in \mathscr{A}_\sigma$

3.2.3 Definition: Fortsetzung des Prämaßes auf $\mathscr{A}_\sigma$

Sei μ ein Prämaß auf $(M, \mathscr{A})$. Dann definieren wir für $A = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A}_\sigma,\ A_n \subset A_{n+1} \in \mathscr{A}$:

$$\mu'(A) := \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

Bemerke: Dieser Grenzwert existiert, da das Prämaß μ monoton auf $\mathscr{A}$ ist.

3.2.4 Lemma über die Eindeutigkeit von μ'

Seien $A, B \in \mathscr{A}_\sigma,\ A \subset B,\ A = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n,\ B = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n,\ A_n \subset A_{n+1} \in \mathscr{A},\ B_n \subset B_{n+1} \in \mathscr{A}$. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \leq \lim_{n\to\infty} \mu(B_n)$$

Bemerke: Aus diesem Lemma folgt die Korrektheit der Definition μ', das heißt dass der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n)$ nicht von der Auswahl der Folge A_n abhängt. Denn für $A = B$ ergebe sich

$$\mu'(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \mu'(B)$$

3.2.5 Eigenschaften von μ'

Die Mengenfunktion μ' auf $\mathscr{A}_\sigma$ besitzt folgende Eigenschaften:

a) $\mu'(A) = \mu(A)$ für $A \in \mathscr{A}$. Insbesondere ist auch $\mu'(\emptyset) = 0$.

b) μ' ist stark additiv auf $\mathscr{A}_\sigma$, das heißt für $A, B \in \mathscr{A}_\sigma$ gilt:

$$\mu'(A \cup B) + \mu'(A \cap B) = \mu'(A) + \mu'(B)$$

c) μ' ist monoton auf $\mathscr{A}_\sigma$, das heißt für $A, B \in \mathscr{A}_\sigma,\ A \subset B$ folgt $\mu'(A) \leq \mu'(B)$.

d) μ' ist stetig von unten auf $\mathscr{A}_\sigma$, das heißt für $A_n \in \mathscr{A}_\sigma,\ A_n \subset A_{n+1},\ n \in \mathbb{N}$ ist:

$$\mu'\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu'(A_n)$$

3.2.6 Definition: Äußeres Maß

Für $A \subset M$ definiert man das *äußere Maß* μ^* gemäß:

$$\mu^*(A) := \inf_{\substack{B\in\mathscr{A}_\sigma \\ A\subset B}} \mu'(B)$$

Bemerkungen:

- Ab nun bezeichnen wir μ' mit μ, also einfach als Erweiterung des Prämaßes μ auf $\mathscr{A}_\sigma$.
- Die Mengenfunktion μ^* auf $\mathscr{P}(M)$ ist in der Regel <u>kein Maß</u> auf $\mathscr{P}(M)$.
- μ^* ist in der Regel <u>nicht additiv</u>.

3.2.7 Eigenschaften des äußeren Maßes

Das äußere Maß μ^* auf $\mathscr{P}(M)$ besitzt die folgenden Eigenschaften:

a) $\mu^*(A) = \mu(A)$ für $A \in \mathscr{A}_\sigma$

b) μ^* ist stark subadditiv: Für $A, B \subset M$ ist

$$\mu^*(A \cup B) + \mu^*(A \cap B) \leq \mu^*(A) + \mu^*(B)$$

c) μ^* ist monoton.

d) μ^* ist stetig von unten: Für $A_n \subset A_{n+1} \subset M,\ n \in \mathbb{N}$ ist:

$$\mu^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu^*(A_n)$$

3.3 Einschränkung des äußeren Maßes

Sei μ ein Prämaß auf $(M, \mathscr{A})$ und $\mathcal{M} := \sigma(\mathscr{A})$. Betrachten die Fortsetzung μ^* von μ auf $\mathscr{P}(M)$.

3.3.1 Definition: $\overline{\mathcal{M}}$

Definieren

$$\overline{\mathcal{M}} := \{A \subset M \mid \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A^c \cap E) = \mu^*(E)\ \forall\ E \subset M\}$$

3.3.2 Satz über $\overline{\mathcal{M}}$

- $\overline{\mathcal{M}}$ ist eine σ-Algebra.
- $\mathscr{A} \subset \mathcal{M} \subset \overline{\mathcal{M}}$

3.3.3 Definition: Einschränkung von μ^* auf $\overline{\mathcal{M}}$

Für $A \in \overline{\mathcal{M}}$ sei $\overline{\mu} := \mu^*(A)$ die Einschränkung von μ^* auf $\overline{\mathcal{M}}$.

3.3.4 Satz über $\overline{\mu}$

$\overline{\mu}$ ist ein Maß auf $(M, \overline{\mathcal{M}})$. Somit ist insbesondere $\overline{\mu}$ eine Fortsetzung des Prämaßes μ auf $\mathscr{A}$ zu einem Maß auf $\overline{\mathcal{M}}$ (und somit auch auf $\mathcal{M} \subset \overline{\mathcal{M}}$), denn

$$\overline{\mu}(A) = \mu(A) \text{ für } A \in \mathscr{A}$$

Somit ist der Existenzsatz von Caratheodory bestätigt.

Folgerungen:

- Es ist $\overline{\mu}(A) = \inf\limits_{A\subset B\in\mathscr{A}_\sigma} \mu(B)$ für $A \in \overline{\mathcal{M}}$.
- Sei μ endlich auf $\mathscr{A}$. Dann folgt:

$$\sup_{\substack{B\subset A\\ B\in\mathscr{A}_\delta}} \mu(B) = \overline{\mu}(A) = \inf_{\substack{A\subset B\\ B\in\mathscr{A}_\sigma}} \mu(B)$$

  wobei

$$\mathscr{A}_\delta := \left\{A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \mid A_{n+1} \subset A_n \in \mathscr{A},\ n \in \mathbb{N}\right\}$$

3.4 Approximationseigenschaften

Sei $(M, \mathcal{M}, \mu)$ ein beliebiger endlicher Maßraum und $\mathscr{A} \subset \mathcal{M}$ eine Algebra mit $\sigma(\mathscr{A}) = \mathcal{M}$.

3.4.1 Approximationssatz

Es gilt:

a) $\sup\limits_{\substack{B \subset A \\ B \in \mathscr{A}_\delta}} \mu(B) = \mu(A) = \inf\limits_{\substack{A \subset B \\ B \in \mathscr{A}_\sigma}} \mu(B)$

b) Sei $A \in \mathcal{M}$. Dann existieren $A_1 \in \mathscr{A}_{\delta_\sigma} := (\mathscr{A}_\delta)_\sigma$ und $A_2 \in \mathscr{A}_{\sigma_\delta} := (A_\sigma)_\delta$ mit

$$A_1 \subset A \subset A_2 \;\wedge\; \mu(A_1) = \mu(A) = \mu(A_2)$$

Bemerkung: Ist $(M, \mathcal{M}, \mu)$ nur σ-endlich, so gilt in (a) nur die rechte Gleichung

$$\mu(A) = \inf_{\substack{A \subset B \\ B \in \mathscr{A}_\sigma}} \mu(B)$$

3.5 Vervollständigung von Maßräumen

3.5.1 Definition: $\mathcal{M}^\mu$

Sei $(M, \mathcal{M}, \mu)$ ein beliebiger Maßraum. Dann definiert man:

$$\mathcal{M}^\mu := \{A \subset M \mid \exists\, A_1, A_2 \in \mathcal{M} : A_1 \subset A \subset A_2 \;\wedge\; \mu(A_1 \triangle A_2) = 0\}$$

Lemma über $\mathcal{M}^\mu$:

- $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}^\mu$
- $\mathcal{M}^\mu$ ist eine σ-Algebra.

3.5.2 Fortsetzung von μ auf $\mathcal{M}^\mu$

Sei $A \in \mathcal{M}^\mu$ mit $A_1 \subset A \subset A_2,\ A_1, A_2 \in \mathcal{M},\ \mu(A_1 \triangle A_2) = 0$. Dann setzt man:

$$\mu(A) := \mu(A_1) = \mu(A_2)$$

Bemerkung:

- Die Definition der Fortsetzung μ auf $\mathcal{M}^\mu$ ist korrekt, das heißt $\mu(A)$ ist unabhängig von A_1, A_2.
- Die Mengenfunktion μ auf $\mathcal{M}^\mu$ ist ein Maß.

3.5.3 Definition: Vervollständigung

(i) $\mathcal{M}^\mu$ heißt die *Vervollständigung* von $\mathcal{M}$ bzgl. μ.

(ii) $(M, \mathcal{M}^\mu, \mu)$ heißt die *Vervollständigung* des Maßraumes $(M, \mathcal{M}, \mu)$.

(iii) Ein Maßraum $(E, \mathscr{E}, \mu)$ heist *vollständig*, falls für alle $A \subset E$ mit $A \subset \mathcal{N} \in \mathscr{E},\ \mu(\mathcal{N}) = 0$ stets $A \in \mathscr{E}$ gilt (und damit auch $\mu(A) = 0$ erfüllt ist). Anders formuliert: Jede in einer Nullmenge enthaltene Menge, ist selbst eine Nullmenge.

3.5.4 Lemma über Vervollständigungen

Die Vervollständigung $(M, \mathcal{M}^{\mu}, \mu)$ von $(M, \mathcal{M}, \mu)$ ist vollständig.

3.5.5 Satz über $\overline{\mu}$ und die Vervollständigung $\mathcal{M}^{\overline{\mu}}$

Sei $(M, \mathcal{M})$ ein messbarer Raum, $\mathscr{A} \subset \mathcal{M}$ eine Algebra mit $\sigma(\mathscr{A}) = \mathcal{M}$, μ ein Prämaß auf $(M, \mathscr{A})$, $\overline{\mathcal{M}}$ die σ-Algebra aus dem Beweis des Fortsetzungssatzes (3.3.1) und $\overline{\mu}$ die entsprechend konstruierte Fortsetzung von $\mu\,|_{\mathscr{A}}$ auf $\overline{\mathcal{M}}$. Dann folgt:

(i) $\mathcal{M}^{\overline{\mu}} \subset \overline{\mathcal{M}}$

(ii) Ist μ endlich, dann gilt $\mathcal{M}^{\overline{\mu}} = \overline{\mathcal{M}}$

4 Konstruktion von Prämaßen

Sei $M \neq \emptyset$ eine beliebige Menge.

4.0.6 Definition: Halbalgebra

Ein Mengensystem $\mathscr{C} \subset \mathscr{P}(M)$ heißt *Halbalgebra*, falls gilt:

- $M \in \mathscr{C}$
- Für $A, B \in \mathscr{C}$ ist auch $A \cap B \in \mathscr{C}$.
- Für $A \in \mathscr{C}$ existieren paarweise disjunkte $A_1, .., A_n \in \mathscr{C}$ mit $A^c = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$.

Bemerkungen:

- $\mathscr{C}$ ist im allgemeinen nicht abgeschlossen bzgl. Vereinigungen, denn sonst wäre $A^c \in \mathscr{C}$
- Es ist $\emptyset \in \mathscr{C}$ denn für $\emptyset = M^c = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k,\ A_k \in \mathscr{C}$ folgt $A_k = \emptyset$.

Beispiel: Für $M = \mathbb{R}$ ist $\mathcal{M} := \mathscr{B}(\mathbb{R})$ die σ-Algebra der Borelmengen:

$$\mathscr{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathscr{G})\ ,\ \mathscr{G} := \{G \subset \mathbb{R} \mid G \text{ offen}\}$$

$$\mathscr{C} := \{[a, b) \cap \mathbb{R} \mid -\infty \leq a \leq b \leq \infty\} : \text{Halbalgebra}$$

Es ist: $\sigma(\mathscr{C}) = \mathscr{B}(\mathbb{R})$

4.0.7 Lemma über Halbalgebren

Sei $\mathscr{C}$ eine Halbalgebra und $\mathscr{A} = \alpha(\mathscr{C})$ die kleinste Algebra die $\mathscr{C}$ enthält. Dann gilt:

$$\mathscr{A} = \left\{ A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k \mid A_1, .., A_n \in \mathscr{C} \text{ paarweise disjunkt} \right\}$$

4.0.8 Satz über Mengenfunktionen auf Halbalgebren

Sei μ eine nicht-negative Mengenfunktion auf einer Halbalgebra $\mathscr{C}$ mit

- $\mu(\emptyset) = 0$
- μ additiv auf $\mathscr{C}$

Dann gilt:

(i) Es existiert genau eine Fortsetzung μ' zu einem Inhalt auf $\mathscr{A} = \alpha(\mathscr{C})$. Speziell ist dann:

$$\mu' = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$$

für $A = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k,\ A_1, ..., A_n \in \mathscr{C}$ paarweise disjunkt.

(ii) Ist μ σ-additiv auf $\mathscr{C}$, so ist μ' ein Prämaß auf $(M, \mathscr{A})$.

4.1 Kompakte Klassen

Problem: Wann ist ein Inhalt auf einer Algebra ein Prämaß?

4.1.1 Lemma über Inhalte auf Algebren

Sei $M \neq \emptyset$ eine beliebige Menge, $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(M)$ eine Algebra, μ ein endlicher Inhalt auf $(M, \mathscr{A})$. Dann gilt:
μ ist ein Prämaß $\Leftrightarrow$ μ ist stetig in $\emptyset$, das heißt für $A_{n+1} \subset A_n \in \mathscr{A}$, $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$.

4.1.2 Definition: Kompakte Klasse

Sei $M \neq \emptyset$ eine beliebige Menge. Ein Mengensystem $\mathscr{K} \subset \mathscr{P}(M)$ heißt *kompakte Klasse*, falls für alle Folgen $\mathcal{K}_n \in \mathscr{K}$ mit $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{K}_n = \emptyset$ folgt: Es existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\bigcap_{n=1}^{N} \mathcal{K}_n = \emptyset$$

Beispiel: Sei (E, ρ) ein metrischer Raum und

$$\mathscr{K} := \{K \subset E \mid K \text{ kompakt}\}$$

Dann ist $\mathscr{K}$ eine kompakte Klasse.

4.1.3 Satz über kompakte Klassen

Sei $M \neq \emptyset$ eine beliebige Menge, $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(M)$ eine Algebra und μ ein endlicher Inhalt auf $(M, \mathscr{A})$. Es existiere eine kompakte Klasse $\mathscr{K} \subset \mathscr{P}(M)$ mit folgender Eigenschaft:

$$(*)\ \forall\ A \in \mathscr{A}\ \forall\ \varepsilon > 0 : \exists\ A' \in \mathscr{A},\ K \in \mathscr{K} : A' \subset K \subset A\ \wedge\ \mu(A) - \mu(A') < \varepsilon$$

Dann ist μ ein Prämaß auf $(M, \mathscr{A})$.

Bemerkungen:

- Im Spezialfall kann gelten: $\mathscr{K} \subset \mathscr{A}$. Dann bedeutet (*):

$$\sup_{\substack{K\in\mathscr{K} \\ K\subset A}} \mu(K) = \mu(A)\ \ \forall\ A \in \mathscr{A}$$

- Der Satz gilt entsprechend für additive Mengen μ auf Halbalgebren mit $\mu(\emptyset) = 0$.

5 Maße auf der reellen Achse

5.1 Borel-Mengen

5.1.1 Definition: Borel-Menge

Betrachten die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Das Mengensystem $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ definiert als

$$\mathscr{B}(\mathbb{R}) := \sigma(\mathscr{G}) \ , \ \mathscr{G} := \{G \subset \mathbb{R} \mid G \text{ offen}\}$$

heißt σ-Algebra der *Borel-Mengen.*

5.1.2 Lemma über Borel-Mengen

Es sei

$$\mathscr{C} := \{[a,b) \cap \mathbb{R} \mid -\infty \leq a \leq b \leq \infty\}$$

Dann gilt:

(i) $\mathscr{C}$ ist eine Halbalgebra.

(ii) $\sigma(\mathscr{C}) = \mathscr{B}(\mathbb{R})$

(iii) Für $\mathscr{A} = \alpha(\mathscr{C})$ ist $\sigma(\mathscr{A}) = \mathscr{B}(\mathbb{R})$

5.1.3 Definition: Lokale Endlichkeit

Ein Maß μ auf $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ heißt *lokal endlich*, falls für alle $x \in \mathbb{R}$ eine offene Menge G_x mit $x \in G_x$ und $\mu(G_x) < \infty$ existiert.

5.1.4 Lemma über lokal endliche Maße

Es sei μ ein Maß auf $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$. Dann gilt:

(i) μ ist lokal endlich $\Leftrightarrow$ $\mu([-n,n]) < \infty \ \forall \ n \geq 1$

(ii) μ ist lokal endlich $\Rightarrow$ μ ist σ-endlich. Die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht!

5.2 Maß-erzeugende Funktionen

5.2.1 Satz über lokal endliche Maße

Sei μ ein lokal endliches Maß auf $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$. Dann existiert eine Funktion $F_\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften:

- F_μ ist monoton wachsend.
- F_μ ist links-stetig.

so dass gilt:

$$\mu([a,b)) = F_\mu(b) - F_\mu(a)$$

Bemerkung: F_μ ist im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt.

5.2.2 Satz über links-stetige, monoton wachsende Funktionen

Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit den Eigenschaften:

- F ist monoton wachsend.
- F ist links-stetig.

Dann existiert ein eindeutig bestimmtes Maß μ auf dem messbaren Raum $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ mit der Eigenschaft:

$$\mu([a, b)) = F(b) - F(a) \ , \ a < b \in \mathbb{R}$$

Das so induzierte Maß ist lokal endlich.

5.2.3 Definition: Maß-erzeugende Funktion

(i) Eine Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit den beiden Eigenschaften aus dem vorigen Satz heißt *maß-erzeugende* Funktion.

(ii) Die Funktion F_μ aus Satz 5.2.1 heißt *μ-Funktion*.

(iii) Eine maßerzeugende Funktion F heißt *Verteilungsfunktion* falls gilt:

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \ , \ \lim_{x \to \infty} F(x) = 1$$

Bemerkung: Eine Verteilungsfunktion $F_\mathcal{P}$ ist eine maßerzeugende Funktion für ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathcal{P}$ auf $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ mit $\mathcal{P}(\mathbb{R}) = 1$. Umgekehrt, setzt man für die Verteilungsfunktion $F_\mathcal{P}$ eines Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathcal{P}$ meist

$$F_\mathcal{P}(x) := \mathcal{P}((-\infty, x))$$

6 Das Lebesgue Maß auf $\mathbb{R}$

6.0.4 Existenzsatz

Es existiert ein eindeutig bestimmtes Maß λ auf $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ mit:

$$\lambda([a,b)) = b - a \ , \ a \leq b \in \mathbb{R}$$

Beweis: Folgt direkt aus Satz 5.2.2, mit $F(x) := x$.

6.0.5 Definition: Lebesgue-Maß

Das eindeutig bestimmte Maß λ auf $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ aus dem vorigen Satz, heißt *Lebesgue-Maß* auf $\mathbb{R}$.
Bemerke: λ ist lokal endlich und somit σ-endlich.

6.1 Gleichverteilung

Betrachten den Grundraum $([0,1], \mathscr{B}([0,1]))$, mit $\mathscr{B}([0,1])$ als die σ-Algebra der Borelmengen aus $[0,1]$, das heißt

$$\mathscr{B}([0,1]) = \sigma(\mathcal{G}) \ , \ \mathcal{G} := \{G \subset [0,1] \mid G \text{ offen in } [0,1]\}$$

Bemerke: $[0,1]$ ist in $[0,1]$ offen.

6.1.1 Lemma über $\mathscr{B}([0,1])$

Es gilt: $\mathscr{B}([0,1]) = \mathscr{B}(\mathbb{R}) \cap [0,1] := \{A \cap [0,1] \mid A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})\}$

6.1.2 Definition: Gleichverteilung auf $[0,1]$

Betrachten die Mengenfunktion $\mathcal{Q}$ auf $\mathscr{B}([0,1])$ definiert durch $\mathcal{Q}(A) := \lambda(A)$. Dann ist $\mathcal{Q}$ ein Maß auf $([0,1], \mathscr{B}([0,1]))$ mit $\mathcal{Q}([0,1]) = \lambda([0,1]) = 1$. Somit ist $\mathcal{Q}$ insbesondere ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $([0,1], \mathscr{B}([0,1]))$. Wir nennen dieses Maß *Gleichverteilung* auf $[0,1]$.

6.1.3 Satz: Verschiebungsinvarianz

Das Lebesgue Maß λ auf $\mathbb{R}$ ist Verschiebungsinvariant, das heißt für $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}$ ist $x + A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ und es gilt: $\lambda(x + A) = \lambda(A)$. Dabei ist $x + A := \{x + y \mid y \in A\}$.

6.1.4 Satz über *geeichte*, verschiebungsinvariante Maße

Es sei μ ein Maß auf $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ mit:

- $\mu([0,1]) = 1$: Eichung
- μ ist Verschiebungsinvariant

Dann gilt: $\mu = \lambda$

7 Konstruktion von σ-Algebren und nicht messbaren Mengen

Sei $M \neq 0$ eine beliebige Menge, $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(M)$ eine Algebra und $\mathcal{M} = \sigma(\mathscr{A})$.
Frage: Wie können wir $\mathcal{M}$ aus $\mathscr{A}$ *konstruktiv* gewinnen?

7.1 Ordnungszahlen

7.1.1 Definition: Halbordnung:

Eine Relation $\leq$ auf einer Menge E heißt *Halbordnung* wenn gilt:

- $\leq$ ist Reflexiv.
- $\leq$ ist Antisymmetrisch, das heißt aus $x \leq y \ \wedge \ y \leq x$ folgt $x = y$.
- $\leq$ ist Transitiv.

Schreiben: $x < y \ :\Leftrightarrow \ x \leq y \ \wedge \ x \neq y$.

7.1.2 Definition: Wohlordnung:

Eine Menge $(E, \leq)$ heißt *wohlgeordnet* falls:

- $(E, \leq)$ *halbgeordnet* ist.
- Jede Untermenge $E_0 \subset E$ besitzt ein *kleinstes* Element.
  Erinnerung: $x \in E_0$ ist *kleinstes Element* von E_0 wenn $\forall\ y \in E_0$ gilt: $x \leq y$.

7.1.3 Definition: Ähnliche wohlgeordnete Mengen

Zwei wohlgeordnete Mengen $(E_1, \leq_1)$, $(E_2, \leq_2)$ heißen *ähnlich* :$\Leftrightarrow$ Es existiert eine Bijektion f von E_1 auf E_2 die die Ordnung erhält, das heißt:

$$\forall\ x_1, x_2 \in E_1 : x_1 \leq x_2 \ \Rightarrow \ f(x_1) \leq f(x_2)$$

7.1.4 Definition: Wohlordnungstyp - Ordnungszahl

Diese oben erwähnte Ähnlichkeitsrelation ($\approx$) ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge alle wohlgeordneten Mengen, und gibt Anlass zum Begriff der Äquivalenzklassen. Die Äquivalenzklasse $\alpha := \overline{(E, \leq)}$ zu $(E, \leq)$ nennt man *Ordnungszahl* (Wohlordnungstyp), und die Menge $(E, \leq)$ *Repräsentanten* von α.

Beispiele:

a) Die Ordnungszahl n entspricht der Äquivalenzklasse zu $\{1, .., n\}$ mit der natürlichen Ordnung.

b) $\omega = \overline{(\mathbb{N}, \leq)}$ stellt den Wohlordnungstyp der Menge der natürlichen Zahlen mit der üblichen Ordnung dar.

c) Für die Ordnungszahl $\alpha = \overline{(E, \leq)}$ existiert der *Nachfolger* $\alpha + 1$: Für $x \notin E$ konstruiert man $E' := E \cup \{x\}$, ausgestattet mit der durch $\leq$ induzierten Ordnung $\leq'$, wobei $\underline{z \leq' x}$ für $z \in E$ sei (x wird *ans Ende gesetzt*). Dann ist $(E', \leq')$ wohlgeordnet, ist nicht ähnlich zu $(E, \leq)$ und $\alpha' := \overline{(E', \leq')}$ heißt der *Nachfolger* von α: $\alpha' = \alpha + 1$.

d) Dies gibt Anlass zur Darstellung $\omega + 1, \omega + 2, ..., \omega + \omega =: \omega 2, \omega 2 + 1, ..., \omega^2, ..$

e) Ein *Vorgänger* von α ist eine Ordnungszahl mit $\beta + 1 = \alpha$. Dieser muss nicht immer existieren.

f) Eine Ordnungszahl α heißt *Limeszahl* :$\Leftrightarrow$ α besitzt keinen Vorgänger. Beispiel: ω selbst.

Bemerkung: Die Menge aller Ordnungszahlen kann wohlgeordnet werden: $\alpha \leq \beta$ (vgl. Prinzip der transfiniten Induktion).

7.2 Konstruktion von $\mathcal{M} = \sigma(\mathscr{A})$

7.2.1 Konstruktion der $\mathscr{A}_\alpha$

Setzen

$$\mathscr{A}_0 := \mathscr{A},\ \mathscr{A}_1 := \mathscr{A}_\sigma,\ \mathscr{A}_2 := (\mathscr{A}_1)_\delta, \mathscr{A}_3 := (\mathscr{A}_2)_\sigma, \dots,\ \mathscr{A}_\omega := \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathscr{A}_n,\ \mathscr{A}_{\omega+1} := (\mathscr{A}_\omega)_\sigma,\ \mathscr{A}_{\omega+2} := (\mathscr{A}_{\omega+1})_\delta, \dots$$

definieren also Induktiv für die (abzählbare) Ordnungszahl:

(i) $\mathscr{A}_0 := \mathscr{A}$

(ii) Induktionsvoraussetzung: Sei $\mathscr{A}_\beta$ definiert für $\beta < \alpha$.

(iii) Induktionsschritt:
Fall: $\exists\ \beta$ mit $\beta + 1 = \alpha$

- Fall: $\exists\ \gamma$ mit $\gamma + 1 = \beta$ und $\mathscr{A}_\beta = (\mathscr{A}_\gamma)_\sigma$. Dann setzen: $\mathscr{A}_\alpha := (\mathscr{A}_\beta)_\delta$
- Fall: $\exists\ \gamma$ mit $\gamma + 1 = \beta$ und $\mathscr{A}_\beta = (\mathscr{A}_\gamma)_\delta$. Dann setzen: $\mathscr{A}_\alpha := (\mathscr{A}_\beta)_\sigma$
- Fall: β Limeszahl: Dann setzen: $\mathscr{A}_\alpha := (\mathscr{A}_\beta)_\sigma$

Fall: α Limeszahl: Dann setzen

$$\mathscr{A}_\alpha := \bigcup_{\beta<\alpha} \mathscr{A}_\beta$$

Mit dem Prinzip der transfiniten Induktion ist so für jede abzählbare Ordnungszahl α jeweils $\mathscr{A}_\alpha$ definiert

7.2.2 Konstruktion von $\mathcal{M}$

Sei ω_1 die *kleinste* Ordnungszahl mit überabzählbarer Mächtigkeit. Diese existiert, da die Ordnungszahlen wohlgeordnet sind. Setzen dann:

$$\mathscr{K} := \bigcup_{\substack{\alpha \text{ Ordnungszahl} \\ \alpha<\omega_1}} \mathscr{A}_\alpha$$

Dann ist $\mathscr{K}$ eine monotone Klasse, mit $\mathscr{A} \subset \mathscr{K} \subset \mathcal{M}$. Mit dem monotonen Klassensatz (1.2.3) folgt dann $\mathscr{K} = \mathcal{M}$.

Beweis: Seien $A_n \subset A_{n+1} \in \mathscr{K}$. Dann existieren abzählbare Ordnungszahlen α_n mit $A_n \in \mathscr{A}_{\alpha_n}$. Somit existiert eine abzählbare Ordnungszahl α mit $\alpha_n \leq \alpha$ für $n \in \mathbb{N}$. Somit ist $A_n \in \mathscr{A}_{\alpha_n} \subset \mathscr{A}_\alpha$ also

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \overset{*}{\in} \mathscr{A}_{\alpha+2} \subset \mathscr{K}$$

(*) Da zwischen $\mathscr{A}_\alpha$ und $\mathscr{A}_{\alpha+2}$ mindestens ein Konstruktionsschritt mit σ-Bildung liegt.
Bemerke: Im allgemeinen gilt: $\mathscr{A}_\alpha \neq \mathcal{M}$ für alle $\alpha < \omega_1$. Beispiel: $M = \mathbb{R}$ und $\mathscr{A}$ die von rechts-offenen Intervallen erzeugte Algebra, $\mathcal{M} = \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Dann ist

$$\mathscr{A}_\alpha \neq \mathscr{B}(\mathbb{R})\ \forall\ \alpha < \omega_1$$

7.3 Mächtigkeit und Vervollständigung von $\mathcal{M}$

7.3.1 Definition: Gleichmächtigkeit

Zwei Mengen A, B heißen *gleichmächtig* $:\Leftrightarrow$ es existiert eine Bijektion $f : A \to B$. Diese Relation ist eine Äquivalenzrelation und gibt Anlass zum Begriff der Äquivalenzklassen von gleichmächtigen Mengen. Ähnlich zu den Ordnungszahlen, ergibt sich hier der Begriff der *Kardinalzahlen*. Zwei Mengen besitzen die gleiche Kardinalität wenn es eine Bijektion zwischen den beiden gibt.
Beispiele:

- $\mathrm{card}(\mathbb{N}) = \mathrm{card}(\underbrace{\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}}_{\text{endlich viele}}) = \mathrm{card}(\mathbb{Q})$
- $\mathrm{card}\,\{\mathscr{P}(A)\} = 2^{\mathrm{card}(A)}$

7.3.2 Satz über die Kardinalität von $\mathcal{M}$

Ist $\operatorname{card}(\mathscr{A}) \geq \operatorname{card}(\mathbb{R})$ so folgt: $\operatorname{card}(\mathcal{M}) = \operatorname{card}(\mathscr{A})$

7.3.3 Satz über die Kardinalität von $\mathscr{B}(\mathbb{R})$

Es gilt: $\operatorname{card}\{\mathscr{B}(\mathbb{R})\} = \operatorname{card}(\mathbb{R})$. Dies folgt direkt aus dem vorigen Satz und der Tatsache dass $\mathscr{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathscr{A})$ mit $\mathscr{A}$ die von rechtsoffenen Intervallen erzeugte Algebra ist, also $\operatorname{card}(\mathscr{A}) = \operatorname{card}(\mathbb{R})$.

Folgerung: Wegen $\operatorname{card}\{\mathscr{P}(\mathbb{R})\} = 2^{\operatorname{card}(\mathbb{R})}$ ist $\operatorname{card}[\{A \subset \mathbb{R} \mid A \notin \mathscr{B}(\mathbb{R})\}] = 2^{\operatorname{card}(\mathbb{R})}$.

7.3.4 Die Vervollständigung $\mathscr{B}^\lambda(\mathbb{R})$

Sei $\left(\mathbb{R}, \mathscr{B}^\lambda(\mathbb{R}), \lambda\right)$ die Vervollständigung des Maßraumes $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Dann heißt $\mathscr{B}^\lambda(\mathbb{R})$ σ-Algebra der *Lebesgue messbaren Mengen*.

7.3.5 Satz über die Kardinalität von $\mathscr{B}^\lambda(\mathbb{R})$

Es ist $\operatorname{card}\left\{\mathscr{B}^\lambda(\mathbb{R})\right\} = 2^{\operatorname{card}(\mathbb{R})} = \operatorname{card}\{\mathscr{P}(\mathbb{R})\}$ (vgl. Cantorsche Menge).

7.3.6 Lemma: Verschiebungsinvarianz von λ auf $\mathscr{B}^\lambda(\mathbb{R})$

Das Lebesgue Maß λ auf $\mathscr{B}^\lambda(\mathbb{R})$ ist verschiebungsinvariant, das heißt für $A \in \mathscr{B}^\lambda(\mathbb{R}),\ x \in \mathbb{R}$ gilt:

- $x + A := \{x + y \mid y \in A\} \in \mathscr{B}^\lambda(\mathbb{R})$
- $\lambda(x + A) = \lambda(A)$

7.3.7 Satz: Existenz nicht messbarer Mengen in $\mathscr{B}^\lambda(\mathbb{R})$

Es gibt eine Teilmenge $V \subset \mathbb{R}$ mit $V \notin \mathscr{B}^\lambda(\mathbb{R})$. Zur Konstruktion dieser Menge wird vom Auswahlaxiom Nutz gemacht: V ist eine Auswahlmenge und heißt *Vitali Menge*.

Konstruktion: Zu $a, b \in \mathbb{R}$ definiert man die Relation: $a \sim b \;:\Leftrightarrow\; a - b \in \mathbb{Q}$. $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}$. Zu $a \in \mathbb{R}$ bezeichne $\mathbb{Q}_a$ die zu a entsprechende Äquivalenzklasse ($a \in \mathbb{Q}_a$). Dann ist $(Q_a)_{a\in\mathbb{R}}$ eine Zerlegung von $\mathbb{R}$.
Bemerke: Für $a, b \in \mathbb{R}$ sind $\mathbb{Q}_a$ und $\mathbb{Q}_b$ entweder gleich oder disjunkt.
Sei V eine Auswahlmenge für $(\mathbb{Q}_a)_{a\in\mathbb{R}} : V \cap \mathbb{Q}_a$ einelementig für $a \in \mathbb{R}$. Dann folgt: $V \notin \mathscr{B}^\lambda(\mathbb{R})$.

7.3.8 Satz über die nicht-Existenz bestimmter Maße auf $\mathscr{P}(\mathbb{R})$

Es existiert <u>kein</u> Maß μ auf $\mathscr{P}(\mathbb{R})$, welches verschiebungsinvariant ist und für welches $\mu([0, 1]) = 1$ gilt.
Bemerkung: Die Eigenschaft $\mu([0, 1]) = 1$ kann durch $0 < \mu([0, 1]) < \infty$ ersetzt werden.

8 Das Integral

Gegeben seien die messbaren Räume $(M, \mathcal{M})$ und $(E, \mathscr{E})$.

8.1 Messbare Funktionen

8.1.1 Definition: Messbare Funktion

Eine Funktion $f : M \to E$ heißt *messbar* von $(M, \mathcal{M})$ in $(E, \mathscr{E})$, falls gilt:

$$f^{-1}(B) = \{x \in M \mid f(x) \in B\} \in \mathcal{M} \quad \forall\, B \in \mathscr{E}$$

Symbolisch schreibt man: $f : (M, \mathcal{M}) \to (E, \mathscr{E})$.

8.1.2 Eigenschaften messbarer Funktionen

(E1) Für messbare Funktionen $f : (M, \mathcal{M}) \to (E_1, \mathscr{E}_1)$, $g : (E_1, \mathscr{E}_1) \to (E_2, \mathscr{E}_2)$ ist die Verkettung $g \circ f : (M, \mathcal{M}) \to (E_2, \mathscr{E}_2)$ auch messbar.
Beweis: Für $B \in \mathscr{E}_2$ ist

$$(g \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}(\underbrace{g^{-1}(B)}_{\in \mathscr{E}_1}) \in \mathcal{M}$$

(E2) Einschränkung messbarer Funktionen: Für eine messbare Funktion $f : (M, \mathcal{M}) \to (E, \mathscr{E})$ und $M_0 \subset M$ ist auch die Einschränkung $f\,|_{M_0}$ von f auf M_0 messbar, das heißt

$$f\,|_{M_0} : (M_0, \mathcal{M} \cap M_0) \to (E, \mathscr{E})$$

Dabei ist $\mathcal{M} \cap M_0 = \{A \cap M_0 \mid A \in \mathcal{M}\}$ die σ-Algebra von M auf M_0 (Spur).
Beweis: Für $B \in \mathscr{E}$ ist

$$(f\,|_{M_0})^{-1}(B) = \underbrace{f^{-1}(B)}_{\in \mathcal{M}} \cap M_0 \in \mathcal{M} \cap M_0$$

(E3) Kriterium für Messbarkeit: Seien $(M, \mathcal{M})$, $(E, \mathscr{E})$ messbare Räume und $f : M \to E$. Sei $\mathcal{C}$ erzeugendensystem für $\mathscr{E}$, das heißt $\sigma(\mathcal{C}) = \mathscr{E}$. Dann gilt:

$$f : (M, \mathcal{M}) \to (E, \mathscr{E}) \text{ messbar } \Leftrightarrow \; f^{-1}(B) \in \mathcal{M} \quad \forall\, B \in \mathcal{C}$$

Beweis: Die Richtung "$\Rightarrow$" ist klar. Sei nun $\tilde{\mathscr{E}} := \left\{B \in \mathscr{E} \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{M}\right\}$. Dann gilt:

- $\mathcal{C} \subset \tilde{\mathscr{E}} \subset \mathscr{E}$
- $\tilde{\mathscr{E}}$ ist σ-Algebra.

Somit ist $\mathscr{E} = \sigma(\mathcal{C}) \subset \sigma\left(\tilde{\mathscr{E}}\right) = \tilde{\mathscr{E}}$ also $\mathscr{E} = \tilde{\mathscr{E}}$.

(E4) Sei $E = \mathbb{R}$ und $\mathscr{E} = \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Dann ist $f : (M, \mathcal{M}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ messbar $\Leftrightarrow$

$$\exists\, \Lambda \subset \mathbb{R} \text{ dicht in } \mathbb{R} : f^{-1}\left((-\infty, r)\right) = \{x \in M \mid f(x) < r\} \in \mathcal{M} \text{ für } r \in \Lambda$$

Beweis: Anwendung von (E3) unter Verwendung von

$$\sigma\left(\{(-\infty, r) \mid r \in \Lambda\}\right) = \mathscr{B}(\mathbb{R})$$

(E5) Sei E metrischer Raum und $\mathscr{E} = \mathscr{B}(E)$, mit

$$\mathscr{B}(E) := \sigma(\mathcal{G}) \;,\; \mathcal{G} := \{G \subset E \mid G \text{ offen}\}$$

Eine Funktion $f(M, \mathcal{M}) \to (E, \mathscr{B}(E))$ ist genau dann messbar, falls gilt:

$$f^{-1}(G) \in \mathcal{M} \quad \forall\, G \in \mathcal{G}$$

Beweis: Anwendung von (E3) auf $\mathcal{C} = \mathcal{G}$.

(E6) Seien E_1, E_2 metrische Räume und f stetig von E_1 in E_2. Dann folgt:

$$f : (E_1, \mathscr{B}(E_1)) \to (E_2, \mathscr{B}(E_2))$$

ist messbar.
Beweis: Da f stetig ist, ist $f^{-1}(G)$ offen in E_1 für alle offenen $G \subset E_2$, das heißt $f^{-1}(G) \subset \mathscr{B}(E_1)\ \forall\ G \subset E_2$ offen. Durch (E5) folgt dann die Behauptung.

8.2 Messbare, erweiterte, reelle Funktionen

8.2.1 Der erweiterte $\hat{\mathbb{R}}$

Definieren $\hat{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, mit den Rechenregeln:

$$\begin{aligned}
&(\pm\infty) + (\pm\infty) = \pm\infty \\
&x + (\pm\infty) = (\pm\infty) + x = \pm\infty\ ,\ x \in \mathbb{R} \\
&x - (\pm\infty) = x + (\mp\infty) = \mp\infty\ ,\ x \in \mathbb{R} \\
&(\pm\infty) \cdot (\pm\infty) = +\infty \\
&(\pm\infty) \cdot (\mp\infty) = -\infty \\
&x \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot x = \pm\infty\ ,\ x \in \mathbb{R},\ x > 0 \\
&x \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot x = \mp\infty\ ,\ x \in \mathbb{R},\ x < 0 \\
&0 \cdot (\pm\infty) = 0
\end{aligned}$$

Verboten sind dabei Ausdrücke der Art:

$$(\pm\infty) - (\pm\infty) \ \text{ und } \ (\pm\infty) + (\mp\infty)$$

8.2.2 Die Metrik $\hat{\rho}$

Der Raum $\mathbb{R}$ sei ausgestattet mit der Metrik $\rho(x, y) := |x - y|$. Definieren die Funktion $h : \hat{\mathbb{R}} \to [-1, 1]$ gemäß

$$h(x) := \begin{cases} 1 & : x = \infty \\ \dfrac{x}{1 + |x|} & : x \in \mathbb{R} \\ -1 & : x = -\infty \end{cases}$$

und $\hat{\rho} : \hat{\mathbb{R}} \times \hat{\mathbb{R}} \to [0, 2]$ gemäß

$$\hat{\rho}(x, y) := |h(x) - h(y)|$$

Dann gilt:

- $(\hat{\mathbb{R}}, \hat{\rho})$ ist ein metrischer Raum.
- Für $G \subset \mathbb{R}$ gilt: G ist offen in $(\mathbb{R}, \rho) \Leftrightarrow G$ ist offen in $(\hat{\mathbb{R}}, \hat{\rho})$.

Dies gibt Anlass zu $\mathscr{B}(\hat{\mathbb{R}})$: der σ-Algebra der Borelmengen in $(\hat{\mathbb{R}}, \hat{\rho})$.

8.2.3 Definition: Messbare, erweitert reelle Funktion

Sei $(M, \mathcal{M})$ ein messbarer Raum.

(i) Eine messbare Funktion f von $(M, \mathcal{M})$ in $(\hat{\mathbb{R}}, \hat{\rho})$ heißt *messbare, erweitert reelle Funktion* (auf $(M, \mathcal{M})$).

(ii) Eine messbare, erweiterte, reelle Funktion f auf $(M, \mathcal{M})$ heißt *messbar reell*, wenn $f(x) \in \mathbb{R}\ \ \forall\ x \in M$ gilt.

8.2.4 Hilfssatz über Borelmengen

Sei (E,ρ) ein metrischer Raum und $E_0 \subset E$ ebenfalls ein metrischer Raum mit der Metrik $\rho_{E_0\times E_0}$ definiert durch

$$\rho_{E_0\times E_0}(x,y) := \rho(x,y)\ ,\ \ x,y\in E_0$$

Dann gilt:

$$\mathscr{B}(E)\cap E_0 = \mathscr{B}(E_0)$$

wobei $\mathscr{B}(E)$ die σ-Algebra der Borelmengen im (E,ρ) und $\mathscr{B}(E_0)$ die σ-Algebra der Borelmengen im $(E_0,\rho_{E_0\times E_0})$ sind.
Bemerkung: Dieser Satz ist eine direkte Folge des Satzes 1.1.9 über σ-Algebren auf Untermengen.

8.2.5 Satz über Borelmengen in $\hat{\mathbb{R}}$

Betrachten den metrischen Raum $(\hat{\mathbb{R}},\hat{\rho})$. Es gilt:

(i) $\mathscr{B}(\hat{\mathbb{R}})\cap\mathbb{R} = \mathscr{B}(\mathbb{R})$

(ii) $\mathscr{B}(\hat{\mathbb{R}}) = \sigma\left(\{[-\infty,r)\mid r\in\Lambda\}\right)$ für eine in $\mathbb{R}$ dichte Menge Λ.

(iii) Für den messbaren Raum $(M,\mathcal{M})$ und $f: M\to\mathbb{R}$ gilt:
f ist messbar (erweitert) reell $\Leftrightarrow$ $f:(M,\mathcal{M})\to(\mathbb{R},\mathscr{B}(\mathbb{R}))$ ist messbar.

8.2.6 Eigenschaften messbarer, erweitert reeller Funktionen

Es sei $(M,\mathcal{M})$ ein messbarer Raum. Nennen f messbar auf $(M,\mathcal{M})$ falls f messbar, erweitert reell ist auf $(M,\mathcal{M})$. Es gelten die Eigenschaften:

(E1) Für messbare f,g, die keine *Unendlichkeiten unterschiedlichen Vorzeichens annehmen*, ist auch $f+g$ definiert durch

$$(f+g)(x) := f(x)+g(x),\ \ x\in M$$

messbar.

(E2) Für eine auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum $(M,\mathcal{M})$ messbare Funktion f, $a\in\mathbb{R}$, $(af)(x) := a\cdot f(x)$, $x\in M$ ist auch af messbar.

(E3) Für messbare Funktionen f,g sind auch die Funktionen $f\vee g$, $f\wedge g$ definiert durch

$$(f\vee g)(x) := f(x)\vee g(x) := \max\{f(x),g(x)\}\ ,\ \ x\in M$$

$$(f\wedge g)(x) := f(x)\wedge g(x) := \min\{f(x),g(x)\}\ ,\ \ x\in M$$

messbar.

(E4) Für eine messbare Funktion f sind auch

$$f^+ := f\vee 0 \ \text{ und } \ f^- := (-f)\vee 0$$

messbar, wobei f^+ und f^- jeweils der positive und negative Anteil von f seien. Dabei wird bezeichnet

$$a,b\in\hat{\mathbb{R}} : a\vee b := \max\{a,b\} \ \rightarrow\ (f\vee 0)(x) := f(x)\vee 0$$

(E5) Ist f messbar, so ist auch $|f|$ definiert durch

$$|f|\,(x) := |f(x)|\ ,\ \ x\in M$$

messbar, denn $|f| = f^+ + f^-$.

(E6) Für eine Folge (f_n) messbarer Funktionen sind auch $\sup_n f_n$ und $\inf_n f_n$ messbar, mit

$$\left(\sup_n f_n\right)(x) := \sup_n f_n(x) \quad \text{und} \quad \left(\inf_n f_n\right)(x) := \inf_n f_n(x)$$

(E7) Für eine Folge (f_n) messbarer Funktionen ist

$$\varliminf_{n\to\infty} f_n = \liminf_{n\to\infty} f_n$$

und

$$\varlimsup_{n\to\infty} f_n = \limsup_{n\to\infty} f_n$$

auch messbar.

(E8) Für messbare Funktionen f, g gilt:

$$\{f < g\}\,,\ \{f > g\}\,,\ \{f \leq g\}\,,\ \{f \geq g\}\,,\ \{f = g\} \in \mathcal{M}$$

(E9) Für eine Folge (f_n) messbarer Funktionen, mit

$$M_0 := \left\{x \in M \mid \lim_{n\to\infty} f_n(x) \text{ existiert in } \hat{\mathbb{R}}\right\}$$

gilt:

(i) $M_0 \in \mathcal{M}$

(ii) Die Funktion $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ definiert durch

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)\ ,\ x \in M_0$$

ist messbar auf $(M_0, \mathcal{M} \cap M_0)$.

(E10) Sei (f_n) eine Folge messbarer Funktionen. Betrachten für ein gegebenes $r_0 \in \hat{\mathbb{R}}$ die Fortsetzung von $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ auf M:

$$f(x) := \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)(x) := \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) & : x \in M_0 \\ \\ r_0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist f messbar auf $(M, \mathcal{M})$.

(E11) Für eine beliebige Menge $A \subset M$ sei

$$1_A(x) := \begin{cases} 1 & : x \in A \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

die so genannte *Indikatorfunktion* von A. Dann ist 1_A genau dann messbar wenn $A \in \mathcal{M}$ ist.

(E12) Für messbare Funktionen f, g ist $f \cdot g$ auch eine messbare Funktion.

8.3 Das Integral nicht-negativer, einfacher Funktionen

Sei $(M, \mathcal{M}, \mu)$ ein beliebiger Maßraum.

8.3.1 Definition: Einfache Funktionen

Eine messbare (erweitert reell) Funktion f auf $(M, \mathcal{M})$ heißt *einfach*, falls f nur endlich viele Werte aus $\hat{\mathbb{R}}$ annimmt.

8.3.2 Satz: Darstellung einfacher Funktionen

Eine einfache Funktion f auf $(M, \mathcal{M})$ besitzt die Darstellung:

$$(D) : f = \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot 1_{A_k}$$

mit den paarweise verschiedenen $c_1, .., c_n \in \hat{\mathbb{R}}$ und der messbaren Zerlegung $\{A_1, .., A_n\}$ von M, das heißt

- $A_1, .., A_n$ sind paarweise disjunkt.
- $\biguplus_{k=1}^{n} A_k = M$
- $A_k \in \mathcal{M}$ für $k = 1, .., n$

Die eindeutig bestimmten c_k sind dann genau die Werte von f und $A_k = \{f = c_k\}\,,\ k = 1, .., n$

8.3.3 Definition: Integral einer nicht negativen, einfachen Funktion

Sei f eine nicht negative, einfache Funktion, mit der oben eingeführten Darstellung (D)

$$f = \sum_{k=1}^{n} c_k 1_{A_k}$$

Dann definiert man

$$\int_M f \; d\mu := \sum_{k=1}^{n} c_k \mu(A_k)$$

Notation:

$$\int_M f \; d\mu \;,\; \int_M f(x) \; d\mu(x) \;,\; \int_M f(x) \; \mu(dx)$$

8.3.4 Eigenschaften des Integrals nicht-negativer, einfacher Funktionen

(E1) Für $A \in \mathcal{M}$ ist

$$\int_M 1_A \; d\mu = \mu(A)$$

(E2) Für eine nicht-negative, einfache Funktion f der Gestalt

$$f = \sum_{j=1}^{p} c'_j 1_{A'_j}$$

mit der messbaren Zerlegung $\{A'_1, .., A'_k\}$ und den (nicht unbedingt paarweise verchiedenen) $c'_1, .., c'_p$ ist

$$\int_M f \; d\mu = \sum_{j=1}^{p} c'_j \; \mu(A'_j)$$

(E3) **Positivität:** Für eine nicht negative, einfache Funktion f ist

$$\int_M f \; d\mu \geq 0$$

(E4) **Linearität:** Seien f, g nicht-negative, einfache Funktionen und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $af + bg \geq 0$. Dann ist auch $af + bg$ eine nicht-negative, einfache Funktion, und es gilt:

$$\int\limits_M (af + bg)\ d\mu = a \int\limits_M f\ d\mu + b \int\limits_M g\ d\mu$$

(E5) **Monotonie:** Für nicht-negative, einfache Funktionen f, g mit $f \leq g$ ist auch

$$\int\limits_M f\ d\mu \leq \int\limits_M g\ d\mu$$

(E6) Für eine nicht-negative, einfache Funktion f gilt: Es ist $\int\limits_M f\ d\mu = 0$ genau dann wenn f fast überall verschwindet, das heißt $\{f \neq 0\}$ ist eine Nullmenge. Man sagt: $f = 0$ μ-fast überall.

8.4 Das Integral nicht-negativer, messbarer Funktionen

Es sei $(M, \mathcal{M}, \mu)$ ein beliebiger Maßraum.

8.4.1 Definition: Nicht-negative messbare Funktion

Eine *nicht-negative,messbare Funktion* f ist eine messbare (erweitert reelle) Funktion auf $(M, \mathcal{M})$ mit $f(x) \geq 0\ \forall\ x \in M$.

8.4.2 Satz: Approximation nicht-negativer, messbarer Funktionen

Es sei f eine nicht-negative messbare Funktion. Dann existiert eine Folge (f_n) nicht-negativer, einfacher Funktionen mit

- $f_n \leq f_{n+1}\ ,\ n \geq 1$
- $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\ ,\ x \in M$

8.4.3 Satz über Folgen nicht-negativer, einfacher Funktionen

Seien $(f_n), (g_n)$ Folgen nicht-negativer, einfacher Funktionen, die außerdem monoton wachsend seien. Es gelte ferner

$$\lim_{n\to\infty} f_n \overset{\text{Punktweise}}{\leq} \lim_{n\to\infty} g_n$$

Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_M f_n\ d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int\limits_M g_n\ d\mu$$

Bemerkung: Die Grenzwerte obiger Integrale existieren aufgrund deren Monotonie immer.

8.4.4 Definition: Integral nicht-negativer, messbarer Funktionen

Sei f eine nicht-negative, messbare Funktion, und (f_n) eine Folge nicht-negativer, einfacher Funktionen mit

- $f_n \leq f_{n+1}\ ,\ n \geq 1$
- $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\ ,\ x \in M$

(vgl. Satz 8.4.2). Dann setzen wir:

$$\int_M f \, d\mu := \lim_{n\to\infty} \int_M f_n \, d\mu$$

Bemerke: Der Grenzwert rechts existiert aufgrund der Monotonie (vgl. 8.3.4) immer, und ist nach Satz 8.4.3 unabhängig von der Auswahl der Folge (f_n). Somit ist die Definition korrekt.
Notation:

$$\int_M f \, d\mu \quad , \quad \int_M f(x) \, d\mu(x) \quad , \quad \int_M f(x) \, \mu(dx)$$

8.4.5 Eigenschaften des Integrals nicht negativer, messbarer Funktionen

(E1) Für beliebige Menge $A \in \mathcal{M}$ ist

$$\int_M 1_A \, d\mu = \mu(A)$$

(E2) **Positivität:** Für messbare, nicht negative Funktion f ist stets

$$\int_M f \, d\mu \geq 0$$

(E3) **Linearität:** Für nicht negative, messbare Funktionen f, g und $a, b \in \hat{\mathbb{R}}$, $a, b \geq 0$ ist auch $af + bg$ nicht negativ, messbar, und es gilt

$$\int_M (af + bg) \, d\mu = a \int_M f \, d\mu + b \int_M g \, d\mu$$

(E4) **Monotonie:** Für nicht negative, messbare Funktionen f, g mit $f \leq g$ gilt:

$$\int_M f \, d\mu \leq \int_M g \, d\mu$$

(E5) Für nicht negative, messbare Funktion f gilt:

$$\int_M f \, d\mu = 0 \;\Leftrightarrow\; f = 0 \quad \mu - \text{fast überall}$$

(E6) Für nicht negative, messbare Funktion f mit $\int_M f \, d\mu < \infty$ gilt: $f < \infty$ μ-fast überall.

Bemerke: Die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht!

8.5 Integrierbare Funktionen

Sei $(M, \mathcal{M}, \mu)$ eine Maßraum und f eine messbare (erweitert reelle) Funktion auf $(M, \mathcal{M})$. Dann ist $f = f^+ - f^-$, mit dem positive Anteil $f^+ = f \vee 0$ und dem negativen Anteil $f^- = (-f) \vee 0$. Dabei sind f^+ und f^- nicht negative, messbare Funktionen, und die Integrale

$$\int_M f^+ \, d\mu \quad , \quad \int_M f^- \, d\mu$$

sind somit definiert.

8.5.1 Definition: Integral messbarer Funktionen

Wir sagen, dass $\int\limits_M f\ d\mu$ *existiert*, falls gilt:

$$\int\limits_M f^+\ d\mu < \infty \quad \text{oder} \quad \int\limits_M f^-\ d\mu < \infty$$

In diesem Fall setzen wir:

$$\int\limits_M f\ d\mu := \int\limits_M f^+\ d\mu - \int\limits_M f^-\ d\mu$$

Die Funktion f heißt *integrierbar*, falls $\int\limits_M f\ d\mu$ existiert und endlich ist. Für eine Menge $A \in \mathcal{M}$ setzen wir ferner:

$$\int\limits_A f\ d\mu := \int\limits_M f \cdot 1_A\ d\mu$$

insofern das Integral $\int\limits_M f \cdot 1_A\ d\mu$ existiert.

8.5.2 Eigenschaften des Integrals

(1) Für $A \in \mathcal{M}$ existiert das Integral $\int\limits_M 1_A\ d\mu$ und es gilt:

$$\int\limits_M 1_A\ d\mu = \mu(A)$$

(2) **Positivität:** Ist f messbar und $f \geq 0$, so gilt

$$\int\limits_M f\ d\mu \geq 0$$

(3) **Linearität:** Seien f, g messbare Funktionen und $a, b \in \mathbb{R}$. Es existieren die Integrale

$$\int\limits_M f\ d\mu \quad , \quad \int\limits_M g\ d\mu$$

und der Ausdruck

$$a\int\limits_M f\ d\mu + b\int\limits_M g\ d\mu$$

sei sinnvoll. Dann existiert das Integral $\int\limits_M (af + bg)\ d\mu$ und es gilt:

$$\int\limits_M (af + bg)\ d\mu = a\int\limits_M f\ d\mu + b\int\limits_M g\ d\mu$$

(4) Es sei f messbar und $f = 0$ μ-fast überall. Dann existiert das Integral $\int\limits_M f\ d\mu$ und es gilt:

$$\int\limits_M f\ d\mu = 0$$

Bemerke: Die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht!

(5) Es seien f, g messbar, es existiere $\int\limits_M f\ d\mu$ und es sei $f = g$ μ-fast überall. Dann existiert auch das Integral $\int\limits_M g\ d\mu$ und es gilt:

$$\int\limits_M g\ d\mu = \int\limits_M f\ d\mu$$

(6) **Monotonie:** Es seien f, g messbar, $f \leq g$ und es existieren die Integrale $\int\limits_M f\ d\mu$, $\int\limits_M g\ d\mu$. Dann gilt:

$$\int\limits_M f\ d\mu \leq \int\limits_M g\ d\mu$$

(7) Seien f, g integrierbar (also insbesondere messbar) und $f \leq g$. Dann gilt:

$$\int\limits_M f\ d\mu = \int\limits_M g\ d\mu \quad \Leftrightarrow \quad f = g \quad \mu - \text{fast überall}$$

(8) Für messbare Funktion f gilt: f ist integrierbar genau dann wenn

$$\int\limits_M |f|\ d\mu < \infty$$

(9) Ist f integrierbar, so ist $|f| < \infty$ μ-fast überall.

8.6 Stetigkeitseigenschaften des Integrals

8.6.1 Satz von Beppo Levi über monotone Konvergenz

Sei $(M, \mathcal{M}, \mu)$ ein beliebiger Maßraum und (f_n) eine monoton wachsende Folge messbarer, nicht negativer, Funktionen, mit

$$f := \lim_{n\to\infty} f_n \quad \text{(punktweise)}$$

Dann folgt:

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_M f_n\ d\mu = \int\limits_M f\ d\mu$$

das heißt Grenzwertbildung und Integration können vertauscht werden.

8.6.2 Folgerung des Satzes von Levi

Sei (f_n) eine Folge monoton wachsender, messbarer Funktionen und $f := \lim\limits_{n\to\infty} f_n$. Es existiere eine messbare Funktion g mit der Eigenschaft:

- $g \leq f_n$ μ-fast überall für $n \in \mathbb{N}$.
- $\int\limits_M g^-\ d\mu < \infty$

Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_M f_n\ d\mu = \int\limits_M f\ d\mu$$

8.6.3 Lemma von Fatou

Es sei (f_n) eine Folge nicht negativer, messbarer Funktionen. Dann folgt:

$$\int\limits_M \varliminf_{n\to\infty} f_n \; d\mu \leq \varliminf_{n\to\infty} \int\limits_M f_n \; d\mu$$

8.6.4 Folgerungen des Lemmas von Fatou

Folgerung 1: Sei (f_n) eine Folge messbarer Funktionen. Es existiere eine messbare Funktion g mit:

- $g \leq f_n$ μ-fast überall für $n \in \mathbb{N}$
- $\int\limits_M g^- \; d\mu < \infty$

Dann gilt:

$$\int\limits_M \varliminf_{n\to\infty} f_n \; d\mu \leq \varliminf_{n\to\infty} \int\limits_M f_n \; d\mu$$

Folgerung 2: Sei (f_n) eine Folge messbarer Funktionen. Es existiere eine messbare Funktion g mit:

- $f_n \leq g$ μ-fast überall für $n \in \mathbb{N}$
- $\int\limits_M g^+ \; d\mu < \infty$

Dann folgt:

$$\varlimsup_{n\to\infty} \int\limits_M f_n \; d\mu \leq \int\limits_M \varlimsup_{n\to\infty} f_n \; d\mu$$

8.7 Konvergenz μ-fast überall

Es sei $(M, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum und (f_n) eine Folge messbarer Funktionen. Ferner sei

$$M_0 := \left\{ x \in M : \lim_{n\to\infty} f_n(x) \text{ existiert in } \hat{\mathbb{R}} \right\}$$

Wir wissen: $M_0 \in \mathcal{M}$

8.7.1 Definition: Konvergenz μ-fast überall

Eine Folge (f_n) messbarer Funktionen heißt *μ-fast überall konvergent*, falls $\mu(M_0^c) = 0$ ist. Für eine μ-fast überall konvergente Folge setzen wir

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n \right)(x) := \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) & : x \in M_0 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist bekanntlich auch $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ messbar auf $(M, \mathcal{M})$.

8.7.2 Satz von Lebesgue über majorisierte Konvergenz

Gegeben sei eine μ-fast überall konvergente Folge (f_n) messbarer Funktionen. Es existiere eine messbare Funktion g mit den folgenden Eigenschaften:

- $|f_n| \leq g$ μ-fast überall für $n \in \mathbb{N}$
- g ist integrierbar.

Dann gilt:

(i) f_n und $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ sind integrierbar.

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_M f_n \, d\mu$ existiert.

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_M f_n \, d\mu = \int\limits_M \lim\limits_{n\to\infty} f_n \, d\mu$

8.8 Das Lebesgue Integral

Es sei $(\mathbb{R}, \mathscr{B}^\lambda(\mathbb{R}), \lambda)$ der Maßraum, mit der σ-Algebra $\mathscr{B}^\lambda(\mathbb{R})$ der Lebesgue-messbaren Mengen (Vervollständigung von $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ bzgl. des Lebesgue-Maßes) und λ die Fortsetzung des Lebesgue-Maßes von $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ auf $\mathscr{B}^\lambda(\mathbb{R})$.

8.8.1 Definition: Lebesgue-messbare Funktionen und das Lebesgue-Integral

Eine Funktion $\mathbb{R} \to \hat{\mathbb{R}}$ heißt *Lebesgue-messbar*, wenn sie als erweitert reelle Funktion über $(\mathbb{R}, \mathscr{B}^\lambda(\mathbb{R}))$ messbar ist. Insofern das Integral

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f \, d\lambda$$

existiert, heißt es das *Lebesgue-Integral* von f über $\mathbb{R}$. Für eine Menge $A \in \mathscr{B}^\lambda(\mathbb{R})$ setzt man

$$\int\limits_A f \, d\lambda := \int\limits_{\mathbb{R}} 1_A \cdot f \, d\lambda$$

insofern der rechte Ausdruck existiert.

Zielstellung: Die Klärung des Zusammenhanges zwischen dem Lebesgue-Integral ($\mathcal{L}$-Integral) und dem Riemann-Integral ($\mathcal{R}$-Integral).

8.8.2 Lemma über die Lebesgue-Messbarkeit erweitert reeller Funktionen

Gegeben sei eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \hat{\mathbb{R}}$. Dann gilt:
f ist Lebesgue-messbar $\Leftrightarrow$ Es existieren Funktionen f_1, f_2, messbar auf $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ mit $f_1 \leq f \leq f_2$ und $\lambda(\{f_1 \neq f_2\}) = 0$.

Bemerkung: Allgemeiner gilt sogar: Für beliebigen Maßraum $(M, \mathcal{M}, \mu)$ ist eine Abbildung $f : M \to \hat{\mathbb{R}}$ genau dann messbar (erweitert reell) auf $(M, \mathcal{M}^\mu)$, wenn es messbare (erweitert reelle) Funktionen f_1, f_2 auf $(M, \mathcal{M})$ mit $f_1 \leq f \leq f_2$ und $\mu(\{f_1 \neq f_2\}) = 0$ gibt.

8.9 Vergleich: Riemann und Lebesgue Integral

8.9.1 Definition: λ-fast überall Stetigkeit

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt λ-fast überall stetig auf $[a, b]$ falls es eine Menge $N \in \mathscr{B}^\lambda(\mathbb{R})$ gibt, mit $\lambda(N) = 0$ und f stetig in allen $x \in [a, b] \cap N^c$ ist.

8.9.2 Satz über beschränkte Funktionen - Vergleich $\mathcal{R}$- und $\mathcal{L}$- Integral

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

a) f ist $\mathcal{R}$-integrierbar auf $[a, b]$

b) f ist λ-fast überall stetig auf $[a, b]$

Ist eine der beiden (und somit beide) Bedingungen erfüllt, so folgt

(i) f ist Lebesgue-integrierbar auf $[a, b]$

(ii) $\int\limits_{[a,b]} f \; d\lambda = \int\limits_a^b f(x) \; dx$ wobei das rechte das bekannte Riemann-Integral sei.

8.10 Transformationssatz

Untersuchen das Verhalten des Integrals bzgl. messbarer Transformationen. Dabei sei $(M, \mathcal{M}, \mu)$ ein beliebiger Maßraum und $(E, \mathscr{E})$ ein messbarer Raum. Zur messbaren Abbildung $T : (M, \mathcal{M}) \to (E, \mathscr{E})$ definieren wir die Mengenfunktion μ_T auf $\mathscr{E}$:

$$\mu_T(A) := \mu\left(T^{-1}(A)\right) \; , \; A \in \mathscr{E}$$

8.10.1 Satz über μ_T

Die oben definierte Mengenfunktion μ_T ist tatsächlich ein Maß auf $(E, \mathscr{E})$.

8.10.2 Definition: Bildmaß

Das durch die messbare Abbildung $T : (M, \mathcal{M}) \to (E, \mathscr{E})$ induzierte Maß μ_T, heißt *Bildmaß* auf $(E, \mathscr{E})$ von μ bzgl. T.

8.10.3 Transformationssatz

Es sei g eine nicht-negative, messbare Funktion auf $(E, \mathscr{E})$. Dann folgt:

(i) $g \circ T$ ist eine messbare Abbildung auf $(M, \mathcal{M})$

(ii) $\int\limits_B g \; d\mu_T = \int\limits_{T^{-1}(B)} g \circ T \; d\mu$ für $B \in \mathscr{E}$.

8.10.4 Folgerung des Transformationssatzes

Es sei g eine beliebige messbare Funktion auf $(E, \mathscr{E})$ und $B \in \mathscr{E}$. Dann gilt:

(i) $g \circ T$ ist messbar auf $(M, \mathcal{M})$

(ii) Das Integral $\int\limits_B g \; d\mu_T$ existiert genau dann wenn das Integral $\int\limits_{T^{-1}(B)} g \circ T \; d\mu$ existiert. In diesem Falle ist

$$\int\limits_B g \; d\mu_T = \int\limits_{T^{-1}(B)} g \circ T \; d\mu$$

9 Produktmaße

9.1 Das Produkt von zwei Maßen

9.1.1 Definition: Direktes Produkt

Es seien $(M_1, \mathcal{M}_1)$ und $(M_2, \mathcal{M}_2)$ beliebige messbare Räume. Dann heißt

$$M := M_1 \times M_2 := \{(x, y) : x \in M_1,\ y \in M_2\}$$

(direktes) Produkt von M_1 und M_2. Dabei definiert man

$$\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2 := \{A_1 \times A_2 : A_1 \in \mathcal{M}_1,\ A_2 \in \mathcal{M}_2\}$$

als die Menge aller *Rechtecke* $A_1 \times A_2$ mit den messbaren *Kanten* $A_1 \in \mathcal{M}_1,\ A_2 \in \mathcal{M}_2$.

9.1.2 Lemma über $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$

Das System $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$ ist eine Halbalgebra über $M = M_1 \times M_2$.

9.1.3 Definition: Produkt zweier messbarer Räume

Das System

$$\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2 := \sigma(\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2) =: \mathcal{M}$$

heißt *Produkt* der σ-Algebren $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$. Der messbare Raum

$$(M, \mathcal{M}) = (M_1 \times M_2, \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2)$$

heißt das *Produkt* der messbaren Räume $(M_1, \mathcal{M}_1)$ und $(M_2, \mathcal{M}_2)$.
Bemerke: Die Reihenfolge im Produkt ist wichtig!

9.1.4 Definition: Schnitt

Es sei $A \subset M = M_1 \times M_2$.

(i) Für $x \in M_1$ heißt

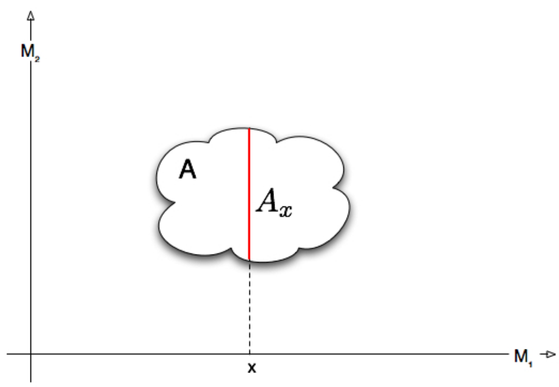
$$A_x := \{y \in M_2 : (x, y) \in A\}$$

Schnitt von A in $x \in M_1$.

(ii) Für $y \in M_2$ heißt

$$A^y := \{x \in M_1 : (x, y) \in A\}$$

Schnitt von A in $y \in M_2$.



9.1.5 Lemma über Schnitte aus Produkten von σ-Algebren

Für $A \in \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$ gilt:

(i) $A_x \in \mathcal{M}_2$ für $x \in M_1$

(ii) $A^y \in \mathcal{M}_1$ für $y \in M_2$

9.1.6 Satz über das Produkt σ-endlicher Maßräume

Seien $(M_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$ und $(M_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$ σ-endliche Maßräume. Dann ist für jedes $A \in \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$ die Funktion $f : M_1 \to \hat{\mathbb{R}}$ definiert durch

$$f(x) := \mu_2(A_x) \quad , \ x \in M_1$$

messbar auf $(M_1, \mathcal{M}_1)$. Setzen wir

$$\mu(A) := \int\limits_{M_1} \mu_2(A_x) \ d\mu_1$$

für $A \in \mathcal{M} := \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$, so ist μ ein σ-endliches Maß auf $(M, \mathcal{M}) = (M_1 \times M_2, \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2)$.

9.1.7 Definition: Produktmaß

Das im vorigen Satz (9.1.6) definierte Maß μ auf $(M_1 \times M_2, \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2)$ heißt das *Produktmaß* von μ_1 und μ_2.
Man schreibt: $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$.

9.1.8 Lemma über das Produktmaß

Es seien $(M_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$ und $(M_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$ σ-endliche Maßräume, und $\mu := \mu_1 \otimes \mu_2$ das Produktmaß auf $(M_1 \times M_2, \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2)$.
Dann gilt:

$$\mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2) \ \ \forall \ A_1 \times A_2 \in \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$$

9.1.9 Satz über die Eindeutigkeit des Produktmaßes

Seien $(M_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$ und $(M_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$ σ-endliche Maßräume. Betrachten den Produktraum

$$(M, \mathcal{M}) := (M_1 \times M_2, \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2)$$

und dazu ein beliebiges Maß μ auf $(M, \mathcal{M})$. Dann gilt:

$$\mu = \mu_1 \otimes \mu_2 \ \Leftrightarrow \ \mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2) \ \ \forall \ A_1 \times A_2 \in \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$$

9.1.10 Satz über Integrale bzgl. des Produktmaßes

Seien $(M_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$ und $(M_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$ σ-endliche Maßräume und $(M, \mathcal{M}, \mu) := (M_1 \times M_2, \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$. Dann gilt:

(1) Für $A \in \mathcal{M}$ und $y \in M_2$ ist $f(y) := \mu_1(A^y)$ eine nicht-negative messbare Funktion auf $(M_2, \mathcal{M}_2)$ und es ist

$$\mu(A) = \int\limits_{M_2} \mu_1(A^y) \ d\mu_2$$

(2) Somit folgt insbesondere

$$\int\limits_{M_1} \mu_2(A_x) \ d\mu_1 = \int\limits_{M_2} \mu_1(A^y) \ d\mu_2$$

9.1.11 Produkt von Wahrscheinlichkeitsräumen

Es seien $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, P_i),\ i = 1, 2$ Wahrscheinlichkeitsräume und

$$(\Omega, \mathcal{F}) := (\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2)$$

Ferner seien $X_i : \Omega \to \Omega_i$ definiert durch

$$X_i(\omega) := \omega_i\ ,\ \omega = (\omega_1, \omega_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2$$

9.1.12 Lemma über die Projektionen X_i

Die Projektionen $X_i : \Omega \to \Omega_i\ ,\ X_i(\omega) := \omega_i$ sind messbar von $(\Omega, \mathcal{F})$ nach $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$.
Bemerkung: Ist P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{F})$ so ist die Projektion X_i eine *zufällige Variable* auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit Werten in $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$.

9.1.13 Satz über unabhängige Variablen

Sei P irgendein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{F})$. Dann sind äquivalent:

- $P = P_{X_1} \otimes P_{X_2}$, wobei P_{X_i} das Bildmaß (vgl. 8.10.2) von P bzgl. X_i auf $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$ ist (Verteilung von X_i auf $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$).
- Die Variablen X_1, X_2 sind unabhängig bzgl. P.
- Die σ-Algebren $X_i^{-1}(\mathcal{F}_i)$ sind unabhängig bzgl. P.

9.2 Der Satz von Fubini

Es seien $(M_i, \mathcal{M}_i)$ messbare Räume und

$$(M, \mathcal{M}) := (M_1 \times M_2, \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2)$$

9.2.1 Definition: Schnittfunktion

Gegeben sei eine Funktion $f : M \to \hat{R}$. Für festes $x \in M_1$ heißt $f_x : M_2 \to \hat{\mathbb{R}}$ definiert durch

$$f_x(y) := f(x, y)\ ,\ y \in M_2$$

Schnittfunktion von f in $x \in M_1$. Analog heißt für $y \in M_2$ die Abbildung $f^y : M_1 \to \hat{\mathbb{R}}$ definiert durch

$$f^y(x) := f(x, y)\ ,\ x \in M_1$$

Schnittfunktion von f in $y \in M_2$.

9.2.2 Lemma über Schnittfunktionen

Sei f eine messbare (erweitert reell) Funktion auf $(M, \mathcal{M})$. Dann folgt:

(1) f_x ist messbar auf $(M_2, \mathcal{M}_2)$ für alle $x \in M_1$.

(2) f^y ist messbar auf $(M_1, \mathcal{M}_1)$ für alle $y \in M_2$.

9.2.3 Satz von Tonelli

Seien $(M_i, \mathcal{M}_i, \mu_i),\ i = 1,2$ σ-endliche Maßräume und

$$(M, \mathcal{M}, \mu) := (M_1 \times M_2, \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$$

Sei $f \geq 0$ messbar (erweitert reell) auf $(M, \mathcal{M})$. Dann gilt:

(1) Die Funktionen

$$g(x) := \int\limits_{M_2} \underbrace{f(x,y)}_{f_x(y)}\ \mu_2(dy)\ ,\ h(y) := \int\limits_{M_1} \underbrace{f(x,y)}_{f^y(x)}\ \mu_1(dx)$$

sind jeweils nicht-negativ, messbar in x bzw. y auf $(M_1, \mathcal{M}_1)$ bzw. $(M_2, \mathcal{M}_2)$.

(2) Es gilt

$$\int\limits_M f(x,y)\ \mu(d(x,y)) = \int\limits_{M_1} \left[\int\limits_{M_2} f(x,y)\ \mu_2(dy) \right]\ \mu_1(dx) = \int\limits_{M_2} \left[\int\limits_{M_1} f(x,y)\ \mu_1(dx) \right]\ \mu_2(dy)$$

Folgerung über Reihen

Sei $(a_{kn})_{(k,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ eine Familie nicht-negativer, reeller Zahlen. Dann folgt:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{kn} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{kn} =: \sum_{k,n=1}^{\infty} a_{kn}$$

Erläuterung: Durch Betrachtung des Zählenmaßes μ_i auf $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$, des Produktmaßes $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$ (Zählmaßes) auf $(\mathbb{N}\times\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N}))$ und der messbaren Funktion $f(k,n) := a_{kn}$ ergibt sich die Behauptung.

9.2.4 Satz von Fubini

Seien $(M_i, \mathcal{M}_i, \mu_i),\ i = 1,2$ σ-endliche Maßräume, $(M, \mathcal{M}, \mu) := (M_1 \times M_2, \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$ und f eine messbare Funktion auf $(M, \mathcal{M})$. Existiert das Integral

$$\int\limits_M f(x,y)\ \mu(d(x,y))$$

so gilt:

(1) Die iterierten Integrale

$$\int\limits_{M_1} \left[\int\limits_{M_2} f(x,y)\ \mu_2(dy) \right] \mu_1(dx)\ ,\ \int\limits_{M_2} \left[\int\limits_{M_1} f(x,y)\ \mu_1(dx) \right] \mu_2(dy)$$

existieren.

(2) Es gilt

$$\int\limits_M f(x,y)\ \mu(d(x,y)) = \int\limits_{M_1} \left[\int\limits_{M_2} f(x,y)\ \mu_2(dy) \right] \mu_1(dx) = \int\limits_{M_2} \left[\int\limits_{M_1} f(x,y)\ \mu_1(dx) \right] \mu_2(dy)$$

Bemerkung 1: Das iterierte Integral

$$\int\limits_{M_1} \left[\int\limits_{M_2} f(x,y)\ \mu_2(dy) \right]\ \mu_1(dx)$$

existiert definitionsgemäß, falls gilt:

(i) Das Integral

$$\int_{M_2} f(x,y)\ \mu_2(dy)$$

existiert μ_1-fast überall, das heißt es gibt eine μ_1-Nullmenge $N \in \mathcal{M}_1$ so dass

$$\int_{M_2} f(x,y)\ \mu_2(dy)$$

für $x \in N^c$ existiert.

(ii) Die Funktion

$$g(x) := \begin{cases} \int_{M_2} f(x,y)\ \mu_2(dy) & : x \in N^c \\ \\ 0 & : x \in N \end{cases}$$

ist messbar auf $(M, \mathcal{M})$.

(iii) Das Integral

$$\int_{M_1} g(x)\ \mu_1(x)$$

existiert.

Bemerkung 2: Folgende Aussagen sind äquivalent

- Das Integral

$$\int_M f\ d\mu$$

existiert.

- Es gilt

$$\int_{M_1} \left[\int_{M_2} f^+(x,y)\ \mu_2(dy) \right] \mu_1(dx) < \infty \quad \vee \quad \int_{M_1} \left[\int_{M_2} f^-(x,y)\ \mu_2(dy) \right] \mu_1(dx) < \infty$$

- Es gilt

$$\int_{M_2} \left[\int_{M_1} f^+(x,y)\ \mu_1(dx) \right] \mu_2(dy) < \infty \quad \vee \quad \int_{M_2} \left[\int_{M_1} f^-(x,y)\ \mu_1(dx) \right] \mu_2(dy) < \infty$$

9.3 Produktmaße für n Faktoren

Es seien $(M_i, \mathcal{M}_i),\ i = 1,..,n$ beliebige messbare Räume und

$$M := M_1 \times \cdots \times M_n \quad , \quad \mathcal{M}_1 \times \cdots \times \mathcal{M}_n := \{A_1 \times \cdots \times A_n : A_i \in \mathcal{M}_i\}$$

Dabei ist $\mathcal{M}_1 \times \cdots \times \mathcal{M}_n$ eine Halbalgebra über M.

9.3.1 Definition: Produkt n messbarer Räume

Die σ-Algebra

$$\mathcal{M} := \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{M}_i := \sigma\left(\bigtimes_{i=1}^{n} M_i\right)$$

heißt das *Produkt* der σ-Algebren $\mathcal{M}_1, .., \mathcal{M}_n$. Der messbare Raum

$$(M, \mathcal{M}) := \left(\bigtimes_{i=1}^{n} M_i,\ \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{M}_n\right)$$

heißt das *direkte Produkt* (oder *Produktraum*) der messbaren Räume $(M_i, \mathcal{M}_i)$.

9.3.2 Satz über die Existenz eines Produktmaßes

Es seien $(M_i, \mathcal{M}_i, \mu_i),\ i = 1, .., n$ σ-endliche Maßräume und

$$(M, \mathcal{M}) := \left(\bigtimes_{i=1}^{n} M_i,\ \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{M}_n\right)$$

Dann existiert genau ein Maß μ auf $(M, \mathcal{M})$ mit

$$\mu\left(\bigtimes_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mu_i(A_i)\ ,\ \ A_i \in \mathcal{M}_i,\ \ i = 1, .., n$$

Dieses Maß ist insbesondere σ-endlich auf $(M, \mathcal{M})$.

9.3.3 Definition: Produktmaß

Das eindeutig bestimmte Maß μ aus Satz 9.3.2 heißt *Produkt* der Maße $\mu_1, .., \mu_n$. Schreibweise:

$$\mu = \mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n = \bigotimes_{i=1}^{n} \mu_i$$

Somit wird

$$(M, \mathcal{M}, \mu) := \left(\bigtimes_{i=1}^{n} M_i,\ \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{M}_n, \bigotimes_{i=1}^{n} \mu_i\right) =: \bigotimes_{i=1}^{n} (M_i, \mathcal{M}_i, \mu_i)$$

zu einem σ-endlichen Maßraum.

9.3.4 Satz von Fubini

Es seien $(M_i, \mathcal{M}_i, \mu_i),\ i \in \mathbb{N}$ σ-endliche Maßräume und

$$(M, \mathcal{M}, \mu) := \bigotimes_{i=1}^{n} (M_i, \mathcal{M}_i, \mu_i)$$

Sei außerdem f eine auf $(M, \mathcal{M})$ messbare Funktion und es existiere das Integral $\int\limits_M f\ d\mu$. Dann gilt: Für alle Permutationen $(i_1, .., i_n)$ von $(1, .., n)$ existiert das iterierte Integral

$$\int\limits_{M_{i_1}} \left[\int\limits_{M_{i_2}} \cdots \left[\int\limits_{M_{i_n}} f(x_1, .., x_n)\ \mu_{i_n}(x_{i_n})\right] \cdots \mu_{i_2}(dx_{i_2})\right]\ \mu_{i_1}(dx_{i_1})$$

und ist gleich $\int\limits_M f\ d\mu$.

9.3.5 Das n-dimensionale Lebesgue-Maß

Betrachten den Maßraum $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ mit dem (1-dimensionalen, σ-endlichen) Lebesgue-Maß λ. Dann ist

$$\lambda^n := \bigotimes_{i=1}^{n} \lambda$$

ein Maß auf $\left(\mathbb{R}^n, \bigotimes_{i=1}^{n} \mathscr{B}(\mathbb{R})\right)$, und heißt das *$n$-dimensionale Lebesgue-Maß.*

9.3.6 Lemma über das n-dimensionale Lebesgue-Maß

Es gilt

$$\bigotimes_{i=1}^{n} \mathscr{B}(\mathbb{R}) = \mathscr{B}\left(\mathbb{R}^n\right)$$

wobei $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ die σ-Algebra der Borelmengen auf $\mathbb{R}^n$ sei. Das Lebesgue-Maß λ^n ist somit definiert auf

$$\left(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}\left(\mathbb{R}^n\right)\right)$$

und charakterisiert durch die Bedingung

$$\lambda^n \left(\bigtimes_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \lambda(A_i) \quad , \quad A_i \in \mathscr{B}(\mathbb{R}),\ i = 1, .., n$$

9.3.7 n-faches Produkt von Wahrscheinlichkeitsräumen

Es seien $(\Omega_i, \mathcal{F}_i),\ i = 1, .., n$ messbare Räume und

$$(\Omega, \mathcal{F}) := \left(\bigtimes_{i=1}^{n} \Omega_i,\ \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{F}_i\right)$$

mit den Projektionen

$$X_i : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\Omega_i, \mathcal{F}_i) \quad , \quad X_i(\omega) := \omega_i\ ,\ \omega = (\omega_1, .., \omega_n) \in \Omega$$

9.3.8 Satz über Wahrscheinlichkeitsmaße auf Produkträumen

(1) Für Wahrscheinlichkeitsmaße P_i auf $(\Omega_i, \mathcal{F}_i),\ i = 1, .., n$ ist auch

$$P := \bigotimes_{i=1}^{n} P_i$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{F})$.

(2) Sei P irgendein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{F})$. Dann ist jedes X_i eine zufällige Variable auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit Werten in $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$. Dabei sind die folgenden Aussagen äquivalent:

a) $P = \bigotimes_{i=1}^{n} P_{X_i}$, wobei P_{X_i} die Verteilung von X_i bzgl. P auf $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$ ist.

b) $X_1, .., X_n$ sind in der Gesamtheit unabhängig bzgl. P.

c) $\left(X_i^{-1}(\mathcal{F}_i)\right)_{i=1,..,n}$ ist eine unabhängige Familie von σ-Algebren bzgl. P. Dabei ist

$$X_i^{-1}(\mathcal{F}_i) = \{\Omega_1 \times \ldots \Omega_{i-1} \times A_i \times \Omega_{i+1} \times \cdots \times \Omega_n : A_i \in \mathcal{F}_i\}$$

9.4 Produktmaße mit unendlich vielen Faktoren

(Beispiel: unendliches Bernoulli Schema)

Seien $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, P_i),\ i \in \mathbb{N}$ Wahrscheinlichkeitsräume, $\Omega := \bigtimes_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ und

$$\mathcal{G}_n := \left\{ A = B \times \Omega^n : B \in \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{F}_i \right\}$$

mit

$$\Omega^n := \bigtimes_{i=n+1}^{\infty} \Omega_i$$

9.4.1 Lemma über die $\mathcal{G}_n$

(1) $\mathcal{G}_n$ ist eine σ-Algebra für jedes $n \in \mathbb{N}$

(2) Die $\mathcal{G}_n$ sind monoton wachsend: $\mathcal{G}_n \subset \mathcal{G}_{n+1}$

(3) Die Menge $\mathscr{A} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{G}_n$ ist eine Algebra.

9.4.2 Definition: Produkt unendlich vieler Wahrscheinlichkeitsräume

Es sei $\mathscr{A} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{G}_n$ wie im vorigen Lemma definiert. Dann heißt $\mathcal{F} := \sigma(\mathscr{A})$ die *Produkt-σ-Algebra* der σ-Algebren $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots$.
Schreibweise:

$$\mathcal{F} = \bigotimes_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i$$

Der messbare Raum

$$(\Omega, \mathcal{F}) = \left(\bigtimes_{i=1}^{\infty} \Omega_i,\ \bigotimes_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i \right) =: \bigotimes_{i=1}^{\infty} (\Omega_i, \mathcal{F}_i)$$

heißt *direktes Produkt* der messbaren Räume $(\Omega_i, \mathcal{F}_i),\ i \in \mathbb{N}$.

9.4.3 Lemma: Einführung einer Mengenfunktion auf $\mathscr{A}$

Zu $A = B \times \Omega^n \in \mathscr{A},\ B \in \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{F}_i$ definiert

$$\mathcal{P}(A) = \left(\bigotimes_{i=1}^{n} P_i \right)(B)$$

eine σ-additive (das heißt stetig in $\emptyset$), normierte, nicht-negative Mengenfunktion auf $\mathscr{A}$.
Bemerke: Insbesondere ist die Definition unabhängig von der Darstellung von A.

9.4.4 Satz: Fortsetzung zu einem Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{F})$

Es existiert genau ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathcal{P}$ auf $(\Omega, \mathcal{F})$ mit

$$\mathcal{P}(A) = \left(\bigotimes_{i=1}^{n} P_i \right)(B) \quad \text{für} \quad A = B \times \Omega^n \in \mathscr{A}\ ,\ B \in \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{F}_i$$

Erläuterung: Dies ist eine direkte Konsequenz des Satzes von Caratheodory (3.1.1).

9.4.5 Definition: Produkt unendlich vieler Wahrscheinlichkeitsmaße

Das in Satz 9.4.4 eingeführte Maß $\mathcal{P}$ auf $(\Omega, \mathcal{F})$ heißt *Produkt* der Wahrscheinlichkeitsmaße $P_i,\ i \in \mathbb{N}$.
Schreibweise:

$$\mathcal{P} = \bigotimes_{i=1}^{\infty} P_i$$

Bemerkungen:

(i) Definieren wir

$$\bigtimes_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i := \left\{ \bigtimes_{i=1}^{\infty} A_i : A_i \in \mathcal{F}_i,\ i \in \mathbb{N}\ ,\ A_i \neq \Omega_i \text{ für höchstens endlich viele } i \right\}$$

so ist

$$\bigtimes_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i \subset \mathscr{A}\ ,\ \sigma\left(\bigtimes_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i\right) = \sigma(\mathscr{A}) = \mathcal{F}$$

(ii) Das Produktmaß $P = \bigotimes_{i=1}^{\infty} P_i$ ist charakterisiert durch

$$P\left(\bigtimes_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \prod_{i=1}^{\infty} P_i(A_i)\ ,\ \bigtimes_{i=1}^{\infty} A_i \in \bigtimes_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i$$

(iii) Satz (9.3.8) über Wahrscheinlichkeitsmaße auf Produkträume gilt analog.

9.4.6 Konstruktion einer unabhängigen Folge von zufälligen Variablen mit gegebener Verteilung

Gegeben seien die Wahrscheinlichkeitsräume $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, P_i),\ i \in \mathbb{N}$. Dann existiert ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sowie zufällige Variablen $X_i : (\Omega, \mathcal{F}, P) \to (\Omega_i, \mathcal{F}_i, P_i),\ i \in \mathbb{N}$ mit folgenden Eigenschaften:

1. Die Verteilung P_{X_i} von X_i bzgl. P ist gleich P_i.

2. $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ist unabhängig bzgl. P.

Beweis: Setzen

$$(\Omega, \mathcal{F}, P) := \bigotimes_{i=1}^{\infty} (\Omega_i, \mathcal{F}_i, P_i)$$

und die Projektionen $X_i : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\Omega_i, \mathcal{F}_i)$ definiert gemäß

$$X_i(\omega) := \omega_i\ ,\ \omega = (\omega_1, \omega_2, \dots) \in \Omega$$

Beispiel: Spezialfall

Betrachten die Räume $(\Omega_i, \mathcal{F}_i) := (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R})),\ i \in \mathbb{N}$ mit den Verteilungsgesetzen P_i auf $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R})),\ i \in \mathbb{N}$. Dann existiert ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und darauf eine unabhängige Folge $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ zufälliger Größen mit $P_{X_i} = P_i\ ,\ i \in \mathbb{N}$.

10 L^p-Räume und Dichtefunktionen

10.1 L^p-Räume

10.1.1 Einführung

Ausgangspunkt sei ein beliebiger Maßraum $(M, \mathcal{M}, \mu)$. Es bezeichne L die Gesamtheit aller messbarer reeller Funktionen auf $(M, \mathcal{M})$. Dann ist bekanntlich L ein linearer Raum über $\mathbb{R}$.
Betrachten die Äquivalenzrelation auf L:

$$f \sim g \ :\Leftrightarrow \ f = g \quad \mu \text{ fast überall, d.h } \mu\left(\{f \neq g\}\right) = 0$$

und den Faktorraum $L^0 := L/\sim$ von L bzgl. $\sim$, das heißt

$$L^0 = \{[f] : f \in L\}$$

wobei $[f]$ die Äquivalenzklasse von $f \in L$ sei. Dabei gilt stets:

$$a\,[f] = [af] \ , \ [f] + [g] = [f + g]$$

Vereinbarung: Man identifiziert die Äquivalenzklasse $[f]$ mit einem (beliebigen) Repräsentanten f.

10.1.2 Definition: L^p

Gegeben sei $0 < p < \infty$. Dann definiert man

$$L^p := \left\{ f \in L^0 : \int\limits_M |f|^p \ d\mu < \infty \right\}$$

und $\|\cdot\|_p : L^p \to \mathbb{R}$ gemäß

$$\|f\|_p := \left(\int\limits_M |f|^p \ d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

Bemerkungen:

- Für messbare Funktion $f \in L$ ist auch $|f|^p \ , \ p \geq 0$ messbar, da Verkettung messbarer Funktionen.
- Später wird sich ergeben: $\|\cdot\|_p$ ist eine Norm auf L^p.

10.1.3 Youngsche Ungleichung

Für $1 < p, q < \infty$ mit $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ und beliebigen $x_1, x_2 \geq 0$ gilt die Ungleichung:

$$x_1 x_2 \leq \frac{x_1^p}{p} + \frac{x_2^q}{q}$$

10.1.4 Höldersche Ungleichung

Für $1 < q, p < \infty$ mit $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{p} = 1$ und $f \in L^p, \ g \in L^q$ gilt:

$$f \cdot g \in \ L^1$$

und

$$\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

Spezialfall: Für Zahlen $p, q > 1$ mit $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ und Zahlenfolgen $(\xi_n), \ (\eta_n)$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k \eta_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

10.1.5 Minkowski Ungleichung

Gegeben sei $p \geq 1$. Für $f, g \in L^p$ ist auch $f + g \in L^p$ und es gilt

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Spezialfall: Für Zahlenfolgen (ξ_n), (η_n) gilt die Ungleichung:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k + \eta_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

10.1.6 Satz: Der L^p als Banach-Raum

Gegeben sei $p \geq 1$ und ein Maßraum $(M, \mathcal{M}, \mu)$. Dann ist $L^p(M, \mathcal{M}, \mu)$ ein Banach-Raum, das heißt ein vollständiger, normierter, linearer Raum. Dabei ist $\|\cdot\|_p$ genau die zugrundeliegende Norm.
Spezialfall: Der $L^2(M, \mathcal{M}, \mu)$ ist sogar ein Hilbertraum mit dem die Norm $\|\cdot\|_2$ induzierenden Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \int_M f \cdot g \; d\mu \; , \; f, g \in L^2$$

10.2 Dichtefunktionen

10.2.1 Satz: Durch messbare Funktionen induzierte Maße

Es sei $(M, \mathcal{M}, \mu)$ ein beliebiger Maßraum und $f \geq 0$ messbar (erweitert reell) auf $(M, \mathcal{M}, \mu)$. Definieren die Abbildung $\eta : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ gemäß

$$\eta(A) := \int_A f \; d\mu = \int_M 1_A \cdot f \; d\mu \quad , \quad A \in \mathcal{M} \tag{1}$$

Dann gilt:

(1) η ist ein Maß auf $(M, \mathcal{M})$

(2) Für $A \in \mathcal{M}$, $\mu(A) = 0$ folgt $\eta(A) = 0$.

10.2.2 Definition: Dichtefunktion

Eine nicht-negative, messbare Funktion f auf $(M, \mathcal{M})$ die Gleichung (1) genügt, heißt *Dichtefunktion* (oder *Dichte*) von η bzgl. μ.

10.2.3 Satz: Eindeutigkeit von Dichtefunktionen

Es sei μ σ-endlich. Dann ist die Dichte eines Maßes η bzgl. μ, μ-fast überall eindeutig bestimmt. Das heißt, sind f_1, f_2 Dichtefunktionen von η bzgl. μ, dann gilt:

$$\mu\left(\{f_1 \neq f_2\}\right) = 0$$

10.2.4 Definition: Absolute Stetigkeit von Maßen

Es seien η, μ Maße auf $(M, \mathcal{M})$. Dann heißt η *absolut stetig* bzgl. μ falls gilt:

$$\forall \; A \in \mathcal{M} : \mu(A) = 0 \;\Rightarrow\; \eta(A) = 0$$

Schreibweise: $\eta \ll \mu$
Bemerkung: Ein Maß η mit der Dichte f bzgl. μ (vgl. Satz (10.2.1)) erfüllt $\eta \ll \mu$.

10.2.5 Satz über absolute Stetigkeit

Seien η, μ Maße auf $(M, \mathcal{M})$ und η endlich. Dann ist $\eta \ll \mu \;\Leftrightarrow$

$$\forall\, \varepsilon > 0 : \exists\, \delta > 0 : \forall\, A \in \mathcal{M} \;:\; \mu(A) < \delta \;\Rightarrow\; \eta(A) < \varepsilon$$

10.2.6 Satz von Radon-Nikodym

Seien η, μ Maße auf $(M, \mathcal{M})$, μ sei σ-endlich und es gelte $\eta \ll \mu$. Dann existiert eine Dichte f von η bzgl. μ:

$$\eta(A) = \int_A f \; d\mu \;,\; A \in \mathcal{M}$$

Notation: Man bezeichnet mit $\dfrac{d\eta}{d\mu}$ die Dichte von η bzgl. μ.

Bemerkungen:

- Diese Dichte $\dfrac{d\eta}{d\mu}$ ist nach Satz 10.2.3 bis auf μ-Nullmengen eindeutig bestimmt.
- η muss nicht unbedingt σ-endlich sein: Betrachten dazu den Maßraum $(M, \mathcal{M}, \mu)$ wobei $\mu \neq 0$ nicht das Nullmaß sei. Die Dichte $f \equiv \infty$ erzeugt das Maß

  $$\eta(A) = \int_A f \; d\mu = \infty \cdot \mu(A) = \begin{cases} 0 & : \mu(A) = 0 \\ \infty & : \mu(A) > 0 \end{cases} \;,\; A \in \mathcal{M}$$

  Dieses Maß η ist <u>nicht</u> σ-endlich.

10.2.7 Representationstheorem von Frechet-Riesz

Sei $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum und L ein stetiges, lineares Funktional $L : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$. Dann existiert ein $y \in \mathcal{H}$ so dass gilt:

$$L(x) = \langle x, y \rangle \quad \forall\, x \in \mathcal{H}$$

10.2.8 Satz: Integrale über Dichten

Sei h eine messbare (erweitert reell) Funktion und η, μ zwei Maße auf $(M, \mathcal{M})$, mit $\eta \ll \mu$ und μ σ-endlich. Dann gilt:

$$\int_M h(x) \; d\eta(x) = \int_M h(x) \; \frac{d\eta}{d\mu}(x) \; d\mu(x)$$

das heißt falls eines der Integrale existiert, so existiert auch das andere und es gilt deren Gleichheit.

Merkregel: Man kann formal schreiben:

$$\int_M h \; d\eta = \int_M h \frac{d\eta}{\cancel{d\mu}} \cancel{d\mu}$$

Achtung: Nur Merkregel!

10.3 Singularität von Maßen

Es seien η, μ beliebige Maße auf $(M, \mathcal{M})$. Dann heißen η, μ *singulär*, oder *orthogonal* falls:

$$\exists\, B \in \mathcal{M} \;:\; \mu(B) = \eta(B^c) = 0$$

Man schreibt: $\eta \perp \mu$.

10.3.1 Zerlegungssatz von Hahn - Lebesgue

Es seien μ, η zwei endliche Maße auf $(M, \mathcal{M})$. Dann existiert eine eindeutige Zerlegung

$$\eta = \eta_a + \eta_s$$

mit den Eigenschaften:

- $\eta_a \ll \mu$
- $\eta_s \perp \mu$

11 Transformation des Lebesgue Maßes

11.0.2 Satz: Substitutionsregel für das Riemann-Integral ($n = 1$)

Es sei $t : [a, b] \to t([a, b]) \subset \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $f : t([a, b]) \to \mathbb{R}$ stetig (beachte: $t([a, b])$ ist auch wieder ein kompaktes Intervall in $\mathbb{R}$). Dann gilt:

$$\int_a^b f(t(x))t'(x)\ dx = \int_{f(a)}^{f(b)} f(y)\ dy$$

Fordert man zusätzlich dass t umkehrbar eindeutig ist (also streng monoton wachsend oder fallend), so folgt:

$$\int_{[a,b]} f(t(x))\ \ |t'(x)|\ \ \lambda(dx) = \int_{t([a,b])} f(y)\ \lambda(dy)$$

11.1 Lineare Transformationen

11.1.1 Satz über das n-dimensionale Lebesgue-Maß

1. Das n-dimensionale Lebesgue-Maß λ^n auf $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n))$ ist verschiebungsinvariant, das heißt für $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ und $x \in \mathbb{R}^n$ ist auch $x + A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ und es gilt
$$\lambda^n(x + A) = \lambda^n(A)$$

2. Sei μ ein Maß auf $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n))$ mit:
   (i) μ ist verschiebungsinvariant.
   (ii) $\mu([0, 1]^n) = 1$

   Dann ist $\mu = \lambda^n$.

11.1.2 Lemma: Zerlegung von Endomorphismen

Jede lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ besitzt die Darstellung

$$T = S \circ \mathcal{O}$$

wobei S ein selbstadjungierter und $\mathcal{O}$ ein orthogonaler Endomorphismus auf $\mathbb{R}^n$ seien.

11.1.3 Satz: Das Lebesgue-Maß unter linearer Transformation

Sei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linear. Für $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ folgt:

$$T(A) \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n) \quad \wedge \quad \lambda^n(T(A)) = |\det T| \cdot \lambda^n(A)$$

Folgerungen:

- Insbesondere für orthogonale Transformation T ist $\det T = 1$ und somit
$$\lambda^n(T(A)) = \lambda^n(A)\ ,\ \ A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$$

- Für nicht-invertierbare Transformationen T ist $\det T = 0$, das heißt jede Borelmenge wird auf eine Nullmenge abgebildet.

- Ferner: Das Lebesgue Maß λ^n ist invariant gegenüber einer beliebigen Bewegung (also Hintereinanderausführung von Translationen und Drehungen).

11.2 Nicht lineare Transformationen

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $t : G \to \mathbb{R}^n$ und $G' := t(G)$ und es gelte:

- t ist umkehrbar eindeutig.
- t ist stetig differenzierbar.
- Für die Funktionaldeterminante $F = t'$ gilt:

$$F(x) = \det \left(\frac{\partial t_i}{\partial x_j}(x) \right)_{i,j=1}^{n} \neq 0 \quad , \quad x \in G$$

Dabei ist

$$t = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} \ , \ t_i : G \to \mathbb{R}$$

und die Umkehrabbildung t^{-1} ist auch stetig differenzierbar und durch den Satz über implizite Funktionen folgt

$$\left(t^{-1}\right)' (t(x)) = [t'(x)]^{-1} \ , \ x \in G$$

Man sagt: t ist ein Diffeomorphismus. Hierbei sind die Voraussetzungen symmetrisch in t und t^{-1}.
Nennen: $\lambda := \lambda^n$.

11.2.1 Satz: Maß diffeomorpher Mengen

Es sei $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n), \ A \subset G$. Dann ist

$$\lambda(t(A)) = \int_A |\det \ t'(x)| \ \lambda(dx)$$

(vgl. lineare Approximation durch Taylorentwicklung bis zum ersten Glied).
Bemerkungen:

- Für $t(x) = Tx, \ x \in \mathbb{R}^n$ mit der $n \times n$ Matrix T ist: $t'(x) = T$ und somit

  $$\lambda(t(A)) = |\det T| \, \lambda(A)$$

  was genau Satz 11.1.3 entspricht.
- Für das Bildmaß $\lambda_{t^{-1}}$ von $\lambda |_{G'}$ bzgl. $t^{-1} : G' \to G$ und beliebiger Menge $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n), \ A \subset G$ (also $A \in \mathscr{B}(G)$) ist

  $$\lambda(t(A)) = \lambda_{t^{-1}}(A)$$

11.2.2 Satz über das Bildmaß $\lambda_{t^{-1}}$

Es bezeichne $\lambda_{t^{-1}}$ das Bildmaß von $\lambda |_{G'}$ bzgl. $t^{-1} : G' \to G$ auf $(G, \mathscr{B}(G))$. Dann gilt:

$$\lambda_{t^{-1}} \ll \lambda |_G$$

und

$$\frac{d\lambda_{t^{-1}}}{d\lambda |_G}(x) = |\det \ t'(x)| \ , \ x \in G$$

Symbolisch: Man schreibt

$$d\lambda_{t^{-1}}(x) = |\det \ t'(x)| \ d\lambda |_G \ (x) \ , \ x \in G$$

11.2.3 Substitutionsregel

Es sei f eine nicht-negative, messbare Funktion auf $(G', \mathscr{B}(G'))$. Dann folgt:

$$\int\limits_{G'} f(y)\ \lambda(dy) = \int\limits_{G} f(t(x)) \cdot |\det\ t'(x)|\ \ \lambda(dx)$$

11.2.4 Abschwächung der Bedingungen

Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ mit G^o die Menge der inneren Punkte von G ($\rightarrow G^o$ offen). $t : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ und G^o erfüllen die Bedingungen in (11.2) und es gelte

$$\lambda(G \setminus G^o) = 0\ ,\ \ \lambda(t(G) \setminus t(G^o)) = 0 \tag{2}$$

Dann erhält die Substitutionsregel (11.2.3) ihre Gültigkeit.
Bemerkung: Aus

$$\lambda(\partial G) = 0\ \ \wedge\ \ \lambda(\partial t(G)) = 0$$

folgt die Bedingung (2).

11.3 Anwendungen

11.3.1 Polarkoordinaten ($n = 2$)

Betrachten das Gebiet $G = [0, \infty) \times [0, 2\pi)$ und die Abbildung $t : G \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$t(\rho, \varphi) = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \end{pmatrix}$$

mit $t(G) = \mathbb{R}^2$. Dann ist

$$\begin{aligned} &G^o = (0, \infty) \times (0, 2\pi) \\ &G \setminus G^o = \{0\} \times [0, 2\pi) \cup [0, \infty) \times \{0\} \\ &t(G) \setminus t(G^o) = \{(0, 0)\} \cup \{(x, y) : y = 0, x > 0\} \end{aligned}$$

das heißt die (abgeschwächten) Bedingungen aus (11.2.4) sind erfüllt und es gilt

$$t'(\rho, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{pmatrix}$$

das heißt

$$\det t'(\rho, \varphi) = \rho \cos^2 \varphi + \rho \sin^2 \varphi = \rho \quad \text{für} \quad (\rho, \varphi) \in G^o$$

Ist nun $f \geq 0$ messbar auf $(\mathbb{R}^2, \mathscr{B}(\mathbb{R}^2))$ so folgt nach der Substitutionsregel

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} f(y)\ \lambda(dy) = \int\limits_{G} \rho \cdot f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)\ \lambda(d(\rho, \varphi))$$

11.3.2 Zylinderkoordinaten ($n = 3$)

Betrachten das Gebiet $G := [0, \infty) \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R}$ und die Abbildung

$$t : G \rightarrow \mathbb{R}^3\ ,\ \ t(\rho, \varphi, z) = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}$$

Analog zu vorhin ist

$$G^o = (0, \infty) \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$$

und t, G^o erfüllen die (abgeschwächten) Bedingungen aus (11.2.4). Mit

$$t'(\rho,\varphi,z) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

folgt $\det t'(\rho,\varphi,z) = \rho > 0$. Für eine auf $(\mathbb{R}^3, \mathscr{B}(\mathbb{R}^3))$ messbare Funktion $f \geq 0$ gilt somit

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} f(y)\ \lambda(dy) = \int\limits_{G} \rho \cdot f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\ \lambda(d(\rho,\varphi,z))$$

11.3.3 Kugelkoordinaten ($n = 3$)

Sei $G := [0,\infty) \times [0,\pi] \times [0, 2\pi)$ und

$$t : G \to \mathbb{R}^3\ ,\ t(\rho,\vartheta,\varphi) = \begin{pmatrix} \rho\sin\vartheta\cos\varphi \\ \rho\sin\vartheta\sin\varphi \\ \rho\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

Mit

$$G^o = (0,\infty) \times (0,\pi) \times (0,2\pi)$$

sind die (abgeschwächten) Bedingungen aus (11.2.4) erfüllt und es gilt

$$t'(\rho,\vartheta,\varphi) = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & \rho\cos\vartheta\cos\varphi & -\rho\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi & \rho\cos\vartheta\sin\varphi & \rho\sin\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta & -\rho\sin\vartheta & 0 \end{pmatrix} \quad \to \quad |\det t'(\rho,\vartheta,\varphi)| = \rho^2\sin\vartheta \quad \text{für} \quad (\rho,\vartheta,\varphi) \in G^o$$

Für messbare Funktion $f \geq 0$ gilt somit

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} f(y)\ \lambda(dy) = \int\limits_{G} \rho^2\sin\vartheta \cdot f(\rho\sin\vartheta\cos\varphi, \rho\sin\vartheta\sin\varphi, \rho\cos\vartheta)\ \lambda(d(\rho,\vartheta,\varphi))$$

12 Ergänzungen

12.1 Lebesgue-Stieltjes Integral

12.1.1 Definition: Lebesgue-Stieltjes Integral

Sei $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsend und linksstetig, das heißt

$$\lim_{y \uparrow x} A(y) = A(x) \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}$$

Dann ist A nach Satz 5.2.2 maßerzeugend, das heißt es existiert ein (eindeutiges) Maß μ auf $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ mit

$$\mu([x,y]) = A(y) - A(x)$$

Für eine messbare Funktion f für die das Integral

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\ \mu(dx)$$

existiert, setzt man

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\ dA(x) := \int_{\mathbb{R}} f(x)\ \mu(dx)$$

12.1.2 Definition: Beschränkte Variation

Eine reelle Funktion $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist von *beschränkter Variation* auf $[a,b]$ falls

$$|A| = \operatorname*{var}_{[a,b]} A := \sup_{\substack{\zeta = \{x_1, .., x_n\} \\ \text{Zerlegung} \\ \text{von } [a,b]}} \sum_{k=0}^{n-1} |A(x_{i+1}) - A(x_i)| < \infty$$

A heißt von *lokal beschränkter Variation* auf $[a,b)$ falls

$$|A|(x) := \operatorname*{var}_{[a,x]} A < \infty \quad \text{für} \quad x \in [a,b)$$

ist.

12.1.3 Satz: Jordan Komposition von Funktionen lokal beschränkter Variation

$A : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei von beschränkter Variation auf $[a,b]$ (vgl. 12.1.2). Dann besitzt A die Darstellung

$$A = A_1 - A_2$$

wobei die A_i monoton wachsende Funktionen sind. Ist A andernfalls von lokal beschränkter Variation auf $[0,\infty)$ so bleibt die Behauptung erhalten. In beiden Fällen erfüllen

$$A_1(x) := \operatorname*{var}_{[a,x]} A\ ,\ \ A_2(x) := A_1(x) - A(x)$$

diese Dekomposition.

12.1.4 Verallgemeinerung des Lebesgue-Stieltje Integrals

$A : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ sei von lokal beschränkter Variation auf $[0,\infty)$ und $A = A_1 - A_2$, wobei die A_i monoton wachsend und linksstetig sind (vgl. Satz 12.1.3). Dann setzt man

$$\int_{[0,\infty)} f(x)\ dA(x) := \int_{[0,\infty)} (x)\ dA_1(x) - \int_{[0,\infty)} f(x)\ dA_2(x)$$

Bemerkung: Definieren wir das *signierte Maß* $\mu := \mu_1 - \mu_2$, mit den von A_i erzeugten Maßen μ_i, so ist

$$\int_{[0,\infty)} f(x)\ dA(x) = \int_{[0,\infty)} f(x)\ d\mu_1(x) - \int_{[0,\infty)} f(x)\ d\mu_2(x) = \int_{[0,\infty)} f(x)\ d\mu(x)$$

12.2 Uneigentliche Riemann-Integrale

Fakt: Uneigentliche Riemann-Integrale können existieren ohne dass das entsprechende Lebesgue Integral existiert!
Beispiel: Das Integral

$$\int_{(0,\infty)} \frac{\sin x}{x} \; \lambda(dx)$$

existiert nicht. Jedoch ist

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \; dx = \frac{\pi}{2}$$

12.3 Der Satz von Daniell

12.3.1 Einführung

Es sei $(M, \mathcal{M})$ ein messbarer Raum. Dazu sei $\mathcal{B} := \mathcal{B}(M, \mathcal{M})$ der lineare Raum der beschränkten messbaren Funktionen auf $(M, \mathcal{M})$, und μ ein endliches Maß auf $(M, \mathcal{M})$. Dabei ist $\mathcal{B} \subset L^2(M, \mathcal{M}, \mu)$. Dann hat das Funktional L auf $\mathcal{B}$, definiert durch

$$L(f) := \int_M f \; d\mu \; , \; f \in \mathcal{B}$$

die Eigenschaften:

1) L ist linear.

2) L ist positiv, das heißt für $f \geq 0$ ist auch $L(f) \geq 0$.

3) Für Folge $(f_n) \subset \mathcal{B}$ mit $0 \leq f_n \downarrow 0$ gilt stets $L(f_n) \downarrow 0$. Dies folgt direkt aus dem Satz von Lebesgue über majorisierte Konvergenz (8.7.2).

Umgekehrt: Für gegebenes Funktional L auf $\mathcal{B}$ mit den Eigenschaften (1)-(3) ist die Mengenabbildung

$$\mu(A) := L(\underbrace{1_A}_{\in \mathcal{B}}) \; , \; A \in \mathcal{M}$$

ein endliches Maß auf $(M, \mathcal{M})$ und es gilt

$$L(f) = \int_M f \; d\mu \; , \; f \in \mathcal{B}$$

12.3.2 Definition: Riesz-Raum

Eine Teilmenge $\mathcal{H} \subset \mathcal{B}(M, \mathcal{M})$ ist ein *Riesz-Raum* falls gilt:

- $\mathcal{H}$ ist linear
- $1_M \in \mathcal{H}$
- $\mathcal{H}$ ist $\wedge$ und $\vee$ stabil, das heißt für $f, g \in \mathcal{H}$ ist auch $f \wedge g, \; f \vee g \in \mathcal{H}$
- Es gilt $\mathcal{M} = \sigma(\mathcal{H})$, das heißt $\mathcal{M}$ ist die kleinste σ-Algebra über die alle $f \in \mathcal{H}$ messbar sind.

Beispiel: Der gesamte $\mathcal{B}(M, \mathcal{M})$ ist ein Riesz-Raum.

12.3.3 Satz von Daniell

$\mathcal{H}$ sei ein Riesz-Raum und L ein Funktional auf $\mathcal{H}$ mit den Eigenschaften (1)-(3) aus (12.3.1). Dann existiert ein eindeutig bestimmtes Maß μ auf $(M, \mathcal{M})$ mit

$$L(f) := \int_M f \; d\mu \; , \; f \in \mathcal{H}$$

Wegen $1_M \in \mathcal{H}$ ist dies insbesondere endlich.

Spezialfall: Für eine Algebra $\mathscr{A} \subset \mathcal{M}$ mit $\mathcal{M} = \sigma(\mathscr{A})$ und endliches Prämaß μ auf $\mathscr{A}$ betrachten wir den Riesz-Raum

$$\mathcal{H} = \left\{ f = \sum_{k=1}^{n} c_k 1_{A_k} : c_1, .., c_n \in \mathbb{R},\ A_1, .., A_n \in \mathscr{A} \right\}$$

und das Funktional

$$L(f) := \sum_{k=1}^{n} c_k \mu(A_k) \ \text{ für } \ f = \sum_{k=1}^{n} c_k 1_{A_k} \in \mathcal{H}$$

Dann erfüllt L auf $\mathcal{H}$ die Eigenschaften (1)-(3) aus (12.3.1). Nach dem Satz von Daniell existiert somit ein (eindeutig bestimmtes, endliches) Maß $\overline{\mu}$ auf $\mathcal{H}$ mit

$$L(f) = \int_M f \, d\overline{\mu} \ , \ f \in \mathcal{H}$$

Insbesondere ist dann $\mu = \overline{\mu} \mid_{\mathscr{A}}$.
Folgerung: Satz von Caratheodory (3.1.1).

12.4 Der Satz von Frigyes Riesz

Sei $\mathcal{K}$ ein kompakter, topologischer Hausdorf Raum, das heißt zu jedem $x \neq y \in \mathcal{K}$ existieren disjunkte, offene Umgebungen $U_x \ni x,\ U_y \ni y$. Ferner sei $\mathcal{C}(\mathcal{K})$ die Menge der stetigen Funktionen auf $\mathcal{K}$. Es gilt: $\mathcal{C}(\mathcal{K})$ ist ein Riesz-Raum.
Für die so genannte *Bairesche* σ-Algebra

$$\mathcal{B}_0(\mathcal{K}) := \sigma(\mathcal{C}(\mathcal{K}))$$

gilt:

- $\mathcal{C}(\mathcal{K}) \subset \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{B}_0(\mathcal{K}))$.
- $\mathcal{B}_0(\mathcal{K}) \subset \mathscr{B}(\mathcal{K})$, wobei $\mathscr{B}(\mathcal{K})$ die Borelmengen auf $\mathcal{K}$ seien.
  Bemerke: Die Gleichheit der beiden Mengen gilt, falls $\mathcal{K}$ separabel ist. Dies ist z.B. der Fall wenn $\mathcal{K}$ metrisch ist, denn für jedes $\varepsilon > 0$ ist dann

  $$\mathcal{K} = \bigcup_{x \in \mathcal{K}} B^o_\varepsilon(x) \overset{\mathcal{K} \text{ kompakt}}{\longrightarrow} \mathcal{K} = \bigcup_{i=1}^{n_\varepsilon} B^o_\varepsilon(x_i^\varepsilon) \ \text{ für endlich viele } x_i^\varepsilon \in \mathcal{K}$$

  das heißt die abzählbare Menge

  $$\left\{ x_i^{\frac{1}{m}} \mid i = 1, .., n_{\frac{1}{m}},\ m \in \mathbb{N} \right\}$$

  ist dicht in $\mathcal{K}$.

12.4.1 Satz von Frigyes Riesz

Sei L ein lineares, positives Funktional auf $\mathcal{C}(\mathcal{K})$. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes endliches Maß μ auf $(\mathcal{K}, \mathcal{B}_0(\mathcal{K}))$ mit

$$L(f) = \int_{\mathcal{K}} f \, d\mu \ , \ f \in \mathcal{C}(\mathcal{K})$$